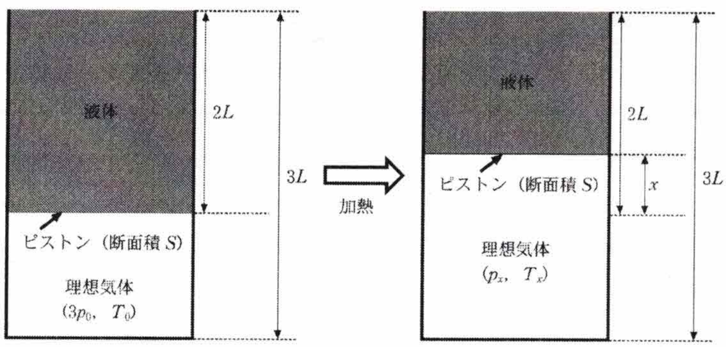
No.

Date 22・2・21　　山口大学 2021 前期

2 以下の説明文を読み，その後の問いに答えなさい。(配点 25)

図1に示すように断面積 S〔m^2〕，長さ $3L$〔m〕のシリンダーを鉛直に立てて，ピストンで n〔mol〕の単原子分子理想気体を封入する。その上に静かに密度 ρ〔kg/m^3〕の液体を入れておく。ピストンの高さが L〔m〕の位置にあるとき，気体の絶対温度は T_0〔K〕，圧力は大気圧 p_0〔Pa〕の3倍であった。これを気体の初期状態（図1 a)）とする。この状態から気体をゆっくり加熱すると，ピストンは静かに上昇し（加速度がゼロである），それに伴って液体はシリンダーの上部からあふれだした。ピストンの厚さと質量は無視できる。また，重力加速度の大きさを g〔m/s^2〕，気体定数を R〔J/(mol·K)〕とする。



a) 初期状態　　b) ピストンが a) の状態から x〔m〕上昇したとき

図1

問 1　液体の密度 ρ〔kg/m^3〕を，g，L，p_0 を用いて表しなさい。

問 2　ピストンが初期状態から x〔m〕上昇してつりあったとき（図1 b)），気体の圧力 p_x〔Pa〕を，x，L，p_0 を用いて表しなさい。

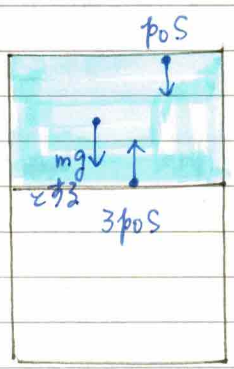
問 3　液体がすべてあふれるまで加熱してつりあったとき（$x = 2L$），気体の温度 T_{2L}〔K〕を，T_0 を用いて表しなさい。

問 4　加熱過程の任意の時刻において，気体の圧力 p と体積 V の関係式を，S，L，p_0 を用いて表しなさい。気体の初期状態から液体がすべてあふれるまでにおいて，気体の状態変化を示す $p-V$ 図を作成しなさい。

問 5　気体の初期状態から液体がすべてあふれるまでのあいだに，気体が外部にした仕事 W〔J〕を，S，L，p_0 を用いて表しなさい。

問 6　気体の初期状態から液体がすべてあふれるまでのあいだに，気体が吸収した熱量 Q〔J〕を，S，L，p_0 を用いて表しなさい。

問1



液体のつり合いの式は

$$3p_0S - p_0S - mg = 0 \quad \cdots ①$$

密度の定義より

$$\left(\rho = \frac{m}{V}\right)$$

$$m = \rho\cdot 2L\cdot S \quad \cdots ②$$

②を①に代入　$\cancel{2}p_0\cancel{S} - \rho\cdot\cancel{2}L\cdot\cancel{S}g = 0$

$$\therefore \rho = \frac{p_0}{gL}$$

確認 次元解析してみる

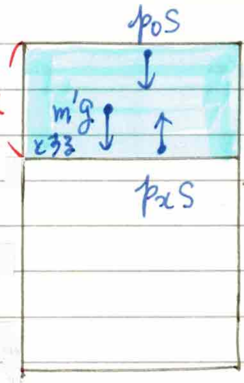
$\rho = [\mathrm{kg\cdot m^{-3}}]$

$L = [\mathrm{m}]$

$g = [\mathrm{m\cdot s^{-2}}]$

$p_0 = [\mathrm{N\cdot m^{-2}}]$

問2



液体のつり合いの式は

$$p_xS - p_0S - m'g = 0 \quad \cdots ③$$

密度がわかったので

$$m' = \underbrace{\frac{p_0}{gL}}_{\text{“}\rho\text{”}}\cdot\underbrace{(2L-x)S}_{\text{“}V\text{”}} \quad \cdots ④$$

(by 問1)

④を③に代入して

$$p_x\cancel{S} = p_0\cancel{S} + \frac{p_0}{\cancel{g}L}(2L-x)\cancel{S}\cancel{g}$$

$$= \underbrace{\left(3 - \frac{x}{L}\right)}_{\text{無次元}}\underbrace{p_0}_{\text{圧力}}$$

とする雰囲気がいい

たしかめ　$x = 0$ で $p_x = 3p_0$ に戻る

問3　あふれる寸前の内気の圧力を p' とする。

(あふれてしまうと外気と混ざるため温度が変わってまずい)

理想〜（ボイル=シャルルでも可）

前　$3p_0\cdot LS = nRT_0 \quad \cdots ⑤$

後　$p'\cdot 3LS = nRT_{2L} \quad \cdots ⑥$

また，問2の結果に $x = 2L$ を代入すると

(あふれる寸前なので使ってよい)

$$p' = \left(3 - \frac{2L}{L}\right)p_0 = p_0 \quad \cdots ⑦$$

$\frac{⑤}{⑥}$ に⑦を代入　$1 = \frac{T_0}{T_{2L}}$

$$\therefore T_{2L} = T_0$$

ニュートン
N がジャマなので正しい式，例えば
$F = ma$
を用いて
$[N] = [kg \cdot m \cdot s^{-2}]$

$p = L^x g^y p_0^z$ とすると
・[kg]について $1 = z$
・[S]について $0 = -2y - 2z$
$\therefore y = -1$
・[m]について $-3 = x + y - z$
$\therefore x = -1$

よって $p = \dfrac{p_0}{gL}$ (ただし次元解析では係数は分からない)

No.
Date 22・2・21

問4 問2の結果より

$$p = \left(3 - \frac{x}{L}\right) p_0 \quad \cdots ⑧$$

題意より $V = (L + x) S \quad \cdots ⑨$

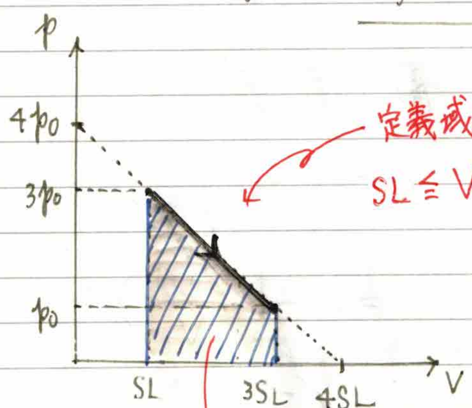
変数と定数をしっかり分けて把握

⑨より $x = \dfrac{V}{S} - L$

⑧に代入

$$p = \left(3 - \frac{\frac{V}{S} - L}{L}\right) p_0$$

$$= \left(4 - \frac{V}{SL}\right) p_0$$



定義域は
$SL \leqq V \leqq 3SL$

問5 問4の p-V 図の面積より

$$W = \frac{1}{\cancel{2}}(p_0 + 3p_0) \cdot \cancel{2}SL = 4p_0SL$$

問6 熱力学第1法則より

$$Q = W + \Delta U$$

単原子の場合
$U = \frac{3}{2}nRT$

ただし ΔU は気体の内部エネルギーの変化。
また $\Delta U = \frac{3}{2}nRT_{2L} - \frac{3}{2}nRT_0 = 0$

よって $Q (= W) = 4p_0SL$

あたかも効率100%
すごい!!
(ただし水がこぼれてる)