山口大学　2011年第1問

図1のように床の上に高さ h [m]の机が置かれている。机の表面はあらく、摩擦力がはたらく。

ある時刻に、机の表面上のP点から距離 L [m]離れた机の端のQ点に向かって質量 $2m$ [kg]の小物体Aを初速度 v_0 [m/s]で滑らせた。

その後、小物体AはQ点に達し、Q点で静止していた質量 m の小球Bに衝突した。小球Bは衝突直後に速さ v_B [m/s]で水平方向に空中に飛び出し、やがて図中に示すように床面からの角 θ でR点に速さ v_R [m/s]で落下した。

重力加速度の大きさを g [m/s^2]として、以下の問いに答えなさい。ただし、小物体Aと小球Bの大きさは無視できるものとする。

問1　机の表面の動摩擦係数を μ' として、小物体AがQ点に到達したとき（小球Bと衝突する直前）の速さ v_A [m/s]を求めなさい。

問2　小物体Aと小球Bのはねかえり係数（反発係数）e を $e=1$ として、衝突直後の小物体Aの速さ v_A' [m/s]と小球Bの速さ v_B [m/s]を、v_A を使って表しなさい。

問3　図1のようにO点を原点とし、水平右向きにx軸、鉛直上向きにy軸をとる。小球Bの運動の軌跡QR上の任意の点を (x, y) とする。y を x, v_B, g, h を使って表しなさい。

問4　R点に落下する直前の小球Bの速さ v_R [m/s]を v_B, g, h を使って表しなさい。

問5　$\theta=45^\circ$ となるための小物体AのP点における初速度 v_0 [m/s]を L, g, μ', h を使って表しなさい。

問6　小物体Aが机の表面上のP点を滑り出した時刻 $t=t_P$ [s]から、小球Bが床上のR点に落下する時刻 $t=t_R$ [s]までの間の小物体Aと小球Bの力学的エネルギーの和 E [J]の時間変化を最もよく表しているグラフはどれか。図2の(a)〜(h)の中から1つ選びなさい。
ただし t_Q [s]は小物体Aと、小球BがQ点で衝突したときの時刻である。

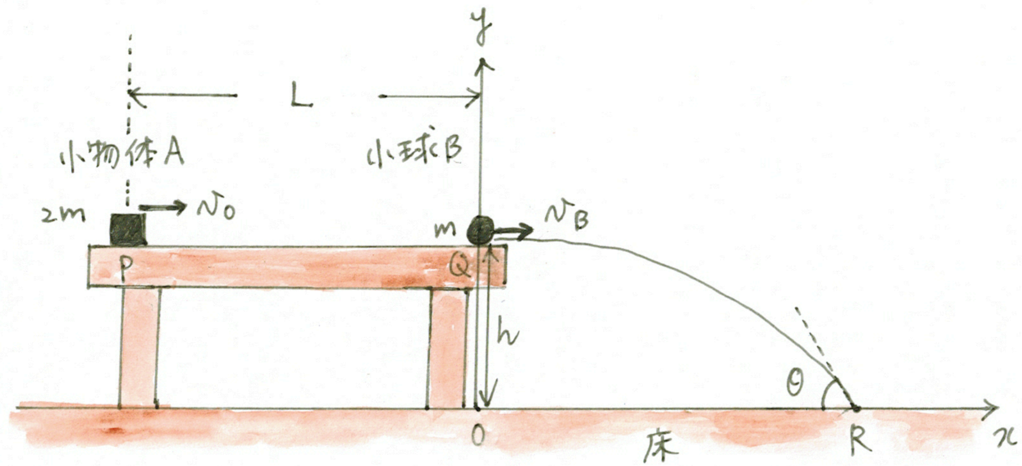


図1

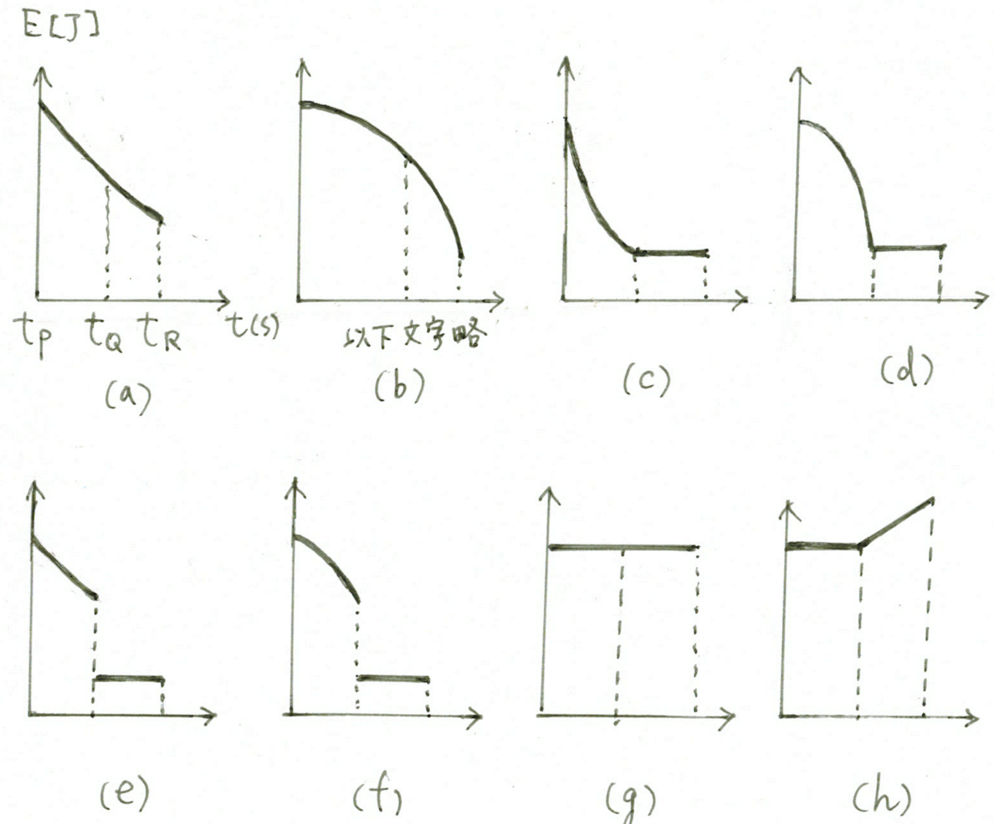


図2

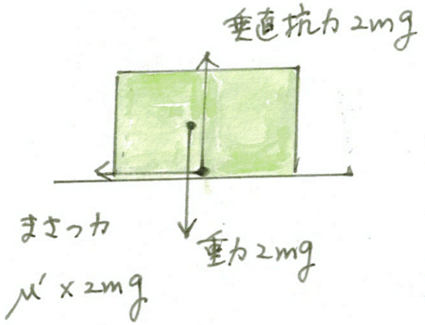
2011 山口大 第1問

問1 エネルギー保存則より

$$\underbrace{\frac{1}{2}(2m)v_0^2}_{\text{点Pでの運動エネルギー}} = \underbrace{\frac{1}{2}(2m)v_A^2}_{\text{点Qでの運動エネルギー}} + \underbrace{(\mu'\times 2mg)\times L}_{\text{まさつによって散逸したエネルギー}} \quad \cdots ①$$

$W = Fx$

仕事 = 力×きょり



① より

$$\cancel{m}v_0^2 = \cancel{m}v_A^2 + 2\mu' mgL$$

$$v_A^2 = v_0^2 - 2\mu' gL$$

$$v_A = \sqrt{v_0^2 - 2\mu' gL} \quad (\because v_A > 0)$$

//

問2 運動量保存則とはねかえり係数の式を連立させる。

問1で出した v_A が間違えていても，「v_Aを用いて表せ」とあるので得点できる。

運動量保存則より

$$\underbrace{(2m)v_A + m\cdot 0}_{\text{衝突前}} = \underbrace{(2m)v_A' + mv_B}_{\text{衝突後}}$$

$$\therefore\ 2v_A = 2v_A' + v_B \quad \cdots ①$$

はねかえり係数の定義より

$$1 = -\frac{v_B - v_A'}{0 - v_A}$$

$$\therefore\ 1 = \frac{v_B - v_A'}{v_A}$$

$$\therefore\ v_A = -v_A' + v_B \quad \cdots ②$$

① − ②

$$v_A = 3v_A' \qquad \therefore\ v_A' = \frac{1}{3}v_A$$

これを②に代入

$$v_A = -\frac{1}{3}v_A + v_B \qquad \therefore\ v_B = \frac{4}{3}v_A$$

//

問3　時刻tを用いて、x, yをそれぞれ表現し、

あとでtを消去（数学の媒介変数表示を復習のこと）

$$x = v_B t \quad \text{（等速運動）} \cdots ③$$

$$y = h - \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{（加速度}g\text{で落下）} \cdots ④$$

③，④からtを消去すると

③より　$t = \dfrac{x}{v_B}$

④に代入

$$y = h - \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{x}{v_B}\right)^2$$

$$= -\frac{g}{2 v_B^2} x^2 + h$$

問4　速さv_Rは

$$v_R = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$= \sqrt{v_B^2 + (gt)^2} \quad \text{（③と④をつかった）}$$

ここでtの情報が必要になる。④に$y=0$を代入して

$$0 = h - \frac{1}{2} g t^2$$

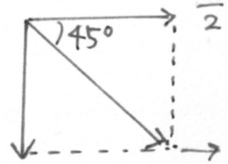
$$\frac{1}{2} g t^2 = h \quad \therefore t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (\because t > 0)$$

これを先程のv_Rの式に代入すると、

$$v_R = \sqrt{v_B^2 + g^2 \cdot \frac{2h}{g}}$$

$$= \sqrt{v_B^2 + 2gh}$$

問5



$\dfrac{\sqrt{2}}{2} \vec{v_R}$ ← これが $\dfrac{dx}{dt}$ と等しい

v_R

三角定規の三角形だね。

③式と上図より

$$\frac{\sqrt{2}}{2} v_R = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{v_B^2 + 2gh} = v_B \quad \text{（∵問4の結果と③式）}$$

問2の結果より

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\left(\frac{4}{3}v_A\right)^2+2gh}=\frac{4}{3}v_A$$

問1の結果より

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\left(\frac{4}{3}\sqrt{v_0^2-2\mu' gL}\right)^2+2gh}=\frac{4}{3}\sqrt{v_0^2-2\mu' gL}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{16}{9}(v_0^2-2\mu' gL)+2gh}=\frac{4}{3}\sqrt{v_0^2-2\mu' gL}$$

両辺を2乗

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{16}{9}(v_0^2-2\mu' gL)+2gh\right\}=\frac{16}{9}(v_0^2-2\mu' gL)$$

$$\frac{8}{9}(v_0^2-2\mu' gL)+gh= 〃$$

両辺×9

$$8(v_0^2-2\mu' gL)+9gh=16(v_0^2-2\mu' gL)$$

$$8v_0^2-16\mu' gL+9gh=16v_0^2-32\mu' gL$$

$$-8v_0^2=-16\mu' gL-9gh$$

$$v_0^2=\frac{16\mu' gL+9gh}{8}$$

$$v_0=\sqrt{2\mu' gL+\frac{9}{8}gh} \quad (\because v_0>0)$$

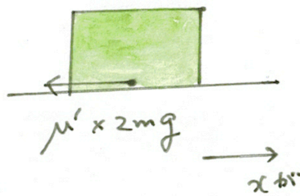
問6 弾性衝突なので、衝突時に力学的エネルギーの損失は起きない → (e)と(f)は ×

衝突後は空中なので力学的エネルギーは保存される。

→ (a)と(b)と(h)は ×

小物体Aが机上にあるときの運動方程式を立ててみると、

「$F = ma$」



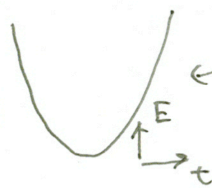
$$-\mu'\cdot 2mg=(2m)\cdot a$$

$$\therefore a=-\mu' g$$

$$\therefore v=v_0-\mu' gt$$

$$E=\frac{1}{2}(2m)(v_0-\mu' gt)^2$$

ここでは、ハンザツにならないよう、aとvの定義をあえて書いていません(選択問題ですし)



こういうタイプの放物線

答えは(C)