東大 2008年 第3問

図 3-1 のように、十分な大きさ L をもった、断面積 S の円筒容器に n モルの気体を入れて密閉し、気体の絶対温度を一定の値 T に保つ。このとき、一様な重力の作用下では、気体の密度は容器の底に近いほど大きく、密度に勾配のある状態となる。容器の底から測った高さを z、単位体積あたりのモル数を c とすれば、c は z の関数とみなすことができ、関係式

$$c(z+\Delta z)-c(z)=-\alpha\,\Delta z\,c(z) \qquad (※)$$

がよい近似でなりたつ。ここで、Δz は高さの差であり、α は高さ z によらない比例係数である。$\alpha\Delta z$ は十分小さいものとする。また、気体 1 モルあたりの質量を m、気体定数を R、重力加速度の大きさを g とする。

I　容器内の気体を理想気体とみなして、以下の問に答えよ。

(1)　高さ z における気体の圧力を $p(z)$ とする。$p(z)$ を $c(z)$ 、T および R を用いて表せ。

(2)　図 3-2 のように、高さ z の位置における、厚さ Δz、断面積 S の気柱に注目する。ここで、高さ z、$z+\Delta z$ における気体の圧力はそれぞれ $p(z)$、$p(z+\Delta z)$ である。また、気柱内の $c(z)$ の変化は十分小さく、気柱内の気体のモル数は、$c(z)S\Delta z$ で与えられるものとする。この気柱にはたらく鉛直方向の力のつり合いを表す式を与えよ。

(3)　上の(1)、(2)の結果から、関係式(※) の係数 α を m、g、T および R を用いて表せ。

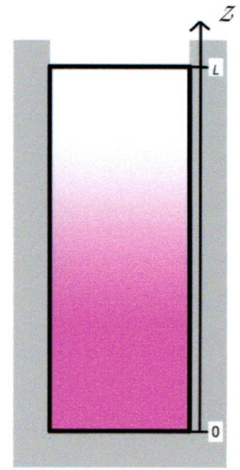
(4)　気体の温度が一様に 13℃の場合に、単位体積あたりの気体のモル数 c が 0.10%減少するような高さの差 Δz を求めよ。ただし、気体 1 モルあたりの質量は　$m = 1.3 \times 10^{-1}$ kg/mol、気体定数 R は 8.3 J/mol·K、重力加速度の大きさは　$g = 9.8$ m/s^2 とする。

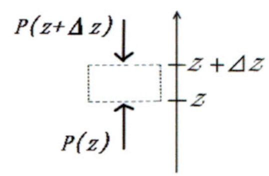
(5)　容器の底と上端での単位体積あたりの気体のモル数の差　$c(0) - c(L)$ を m、g、T、R、n および S を用いて表せ。

II　図 3-3 のように、軽くて変形しない小さな物体を容器内の気体の中に入れておいたところ、やがて高さ z_0 の位置で静止した。物体の体積を v、質量を M として、以下の問に答えよ。

(1)　高さ z_0 における単位体積あたりの気体のモル数 $c(z_0)$ を M、v および m を用いて表せ。

(2)　物体が高さ　$z=z_0+\Delta z(\Delta z>0)$　にあるとき、物体にはたらく力 F の大きさを M、g、α およびを Δz 使って表し、また、その向きを答えよ。ただし、Δz は十分小さく、関係式(※) がなりたつものとしてよい。





東大 2008 第3問

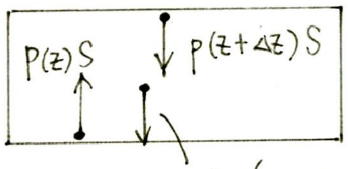
I (1) 状態方程式「$pV = nRT$」に必要な値を代入する。

題意より $c(z)$ は単位体積 ($V=1$) あたりのモル数であるから、

$$p(z)\cdot 1 = c(z)\cdot R\cdot T$$

「1」は書かないけど…

(2)



重力 $(c(z)\cdot S\cdot \Delta z)\cdot mg$

1モル当たりの質量

z軸は上向き正なので

$$p(z)S - c(z)S\Delta z\, mg - p(z+\Delta z)S = 0$$

(3) (2)の結果に $p(z) = c(z)RT$ と、

$p(z+\Delta z) = c(z+\Delta z)RT$ を代入して

$$c(z)RT\cancel{S} - c(z)\cancel{S}\Delta z\, mg - c(z+\Delta z)RT\cancel{S} = 0$$

を得る。従って

$$c(z+\Delta z)RT - c(z)RT = -\Delta z\, mg\, c(z)$$

$$\therefore c(z+\Delta z) - c(z) = -\frac{mg}{RT}\Delta z\, c(z) \quad \cdots ①$$

問題文(*)式と比較して $\alpha = \dfrac{mg}{RT}$

(4) c が 0.10% 減少 $\Leftrightarrow \dfrac{c(z+\Delta z)-c(z)}{c(z)} = -\dfrac{0.10}{100}$

①より

$$\left(-\frac{0.10}{100} = \right)\frac{c(z+\Delta z)-c(z)}{c(z)} = -\frac{mg}{RT}\Delta z$$

$$-\frac{0.10}{100} = \frac{1.3\times 10^{-1}\cdot 9.8}{8.3\cdot(273+13)}\Delta z$$

$$\therefore \Delta z \fallingdotseq 1.9 \ [\mathrm{m}]$$

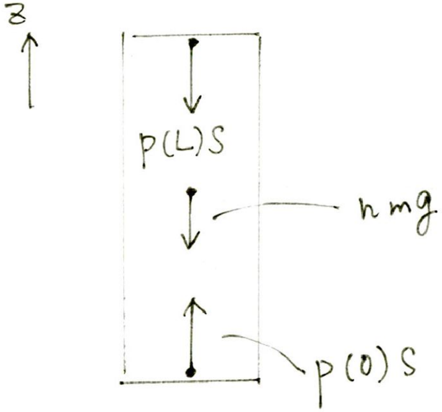
この筆算、あまり楽ができない…。

京大なら $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$, $T = 27$°C にしそうだ…。

(5) (1)の状態方程式より

$$c(0)-c(L)=\frac{1}{RT}\left\{p(0)\cdot\underset{V=1}{\underset{\uparrow}{1}}-p(L)\cdot\underset{V=1}{\underset{\uparrow}{1}}\right\}\quad\cdots ②$$

容器全体にかかる力のつり合いは



$$p(0)S-p(L)S-nmg=0$$

であるから、これを②に代入して

$$c(0)-c(L)=\frac{1}{RT}\cdot\frac{nmg}{S}$$

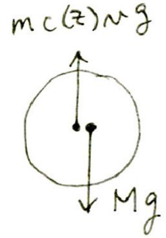
//

II (1) 小物体の受ける浮力は「$F=\rho Vg$」に

$$\rho=\frac{mc(z_0)\ \text{← 単位体積あたりの質量}}{1\ \text{← 単位体積}}=mc(z_0)$$

と $V=v$ を代入して $F=mc(z_0)vg$ である。

したがって、小物体にかかる力のつり合いは



$$mc(z_0)v\cancel{g}-M\cancel{g}=0\quad\cdots ③$$

$$c(z_0)=\frac{M}{mv}$$

//

(2) Fは重力と浮力の合力であり、高さ $z_0+\Delta z$ では

$$F=mc(z_0+\Delta z)vg-Mg\quad\cdots ④$$

である。(ごめん、II(1)のFと文字がかぶった…)。

(*)式より $c(z_0+\Delta z)-c(z_0)=-\frac{RT}{mg}\Delta z<0$ ← 全変数が正

であるから

$$F<\underbrace{mc(z_0)}_{\uparrow}vg-Mg\overset{③}{=}0$$ つまり鉛直下向き

//

$c(z_0+\Delta z)$ を $c(z_0)$ で置き換えた分大きくなった。

また、力の大きさは

$$|F| = Mg - mc(z_0+\Delta z)\nu g$$

← Fが負とわかったので ⊕とともに左右を入れ替えた

$$= Mg - m\{c(z_0) - \alpha\Delta z\, c(z_0)\}\nu g \quad (\because (*))$$

$$= Mg - mc(z_0)\nu g + m\alpha\Delta z\, c(z_0)\nu g$$

$$= Mg - \cancel{m}\cdot\frac{M}{\cancel{m}\cancel{\nu}}\cancel{\nu}g + \cancel{m}\alpha\Delta z\cdot\frac{M}{\cancel{m}\cancel{\nu}}\cdot\cancel{\nu}g \quad (\because \mathrm{II}(1))$$

$$= Mg\alpha\Delta z$$

実はこの問題は，大学の流体力学の教科書にそのまんま出てくる。

I(4)の答えから，大気圧が 0.1% 変化する高さは 1.9 m とわかる $(\underbrace{p}_{0.1\%減}\underbrace{V}_{一定} = \underbrace{n}_{0.1\%減}R\underbrace{T}_{一定})$。　1013 hPa × 0.1% = 1.3 hPa くらい変化してるハズ。

以上