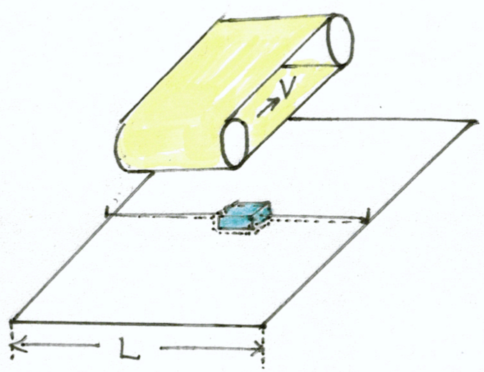
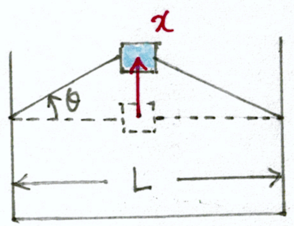
東京大学　2007年第1問

バイオリンの弦は弓でこすることにより振動する。弓を当てる力や動かす速さの影響を、**図1-1** に示すモデルで考えてみよう。

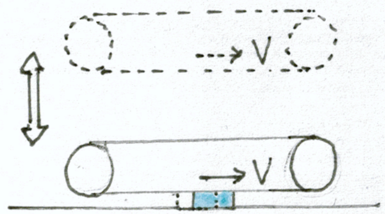
長さ L の軽い糸を張力 F で水平に張り、糸の中央に質量 m の箱を取り付ける。箱は、糸が水平の状態で水平面と接しており、糸の両端を結ぶ線分の垂直二等分線上をなめらかに動くことができる。**図1-1(b)**のように、糸の両端を結ぶ線分の中点（太矢印の始点）を箱の変位 x の原点とし、太矢印の向きを変位および力の正の向きとする。箱の変位は糸の長さに比べて十分小さく、糸の張力は一定と見なすことができる。**図1-1(c)**のように、箱の上には正の向きに一定の速さ V で動いているベルトがあり、箱に接触させることができるようになっている。ベルトから見た箱の速度をベルトと箱の相対速度と定義する。ベルトと箱が接触している状態で相対速度が0のとき、ベルトから箱に静止摩擦力が働く。静止摩擦係数を μ とする。ベルトから箱に働く動摩擦力および糸と箱に働く空気抵抗を無視する。



(a)



(b) 上から見た図



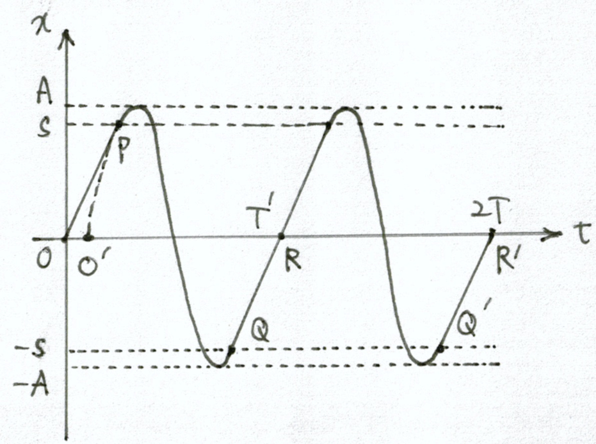
(c) 横から見た図

I　ベルトと箱が接触していないときの箱の運動を考える。**図1-1(b)**のように、糸の両端を結ぶ線分と糸がなす角を θ [rad]とする。
必要があれば $|\theta|$ が1に比べて十分小さいときに成り立つ近似式 $\sin\theta \simeq \tan\theta \simeq \theta$ を用いてよい。

(1)　糸から箱に働く復元力の大きさを F, θ を用いて表せ。また、この復元力の大きさを L, F, x を用いて表せ。

(2)　箱に初期変位か初期速度を与えると、箱は単振動をする。単振動の周期 T を L, F, m を用いて表せ。

II　箱が単振動をしているとき、ベルトを一定の垂直抗力 N で箱に接触させたところ、ベルトと箱がくっついている状態と滑っている状態が交互に現れた。箱の変位 x が0、箱の速度が V （すなわち、ベルトと箱の相対速度が0）となる瞬間があり、この瞬間を時間の原点 $t=0$ とする。 $t>0$ で箱の変位 x は**図1-2** のOPQRP'Q'R'に示すように周期的に変化する（2周期分を示している）。OPは直線、PQは正弦曲線の一部、QRは直線、RP'Q'R'はOPQRの繰り返しである。また、直線OPは点Pで正弦曲線O'PQと接している。点Oから点Rまで箱の1周期の運動に要する時間を T' とする。

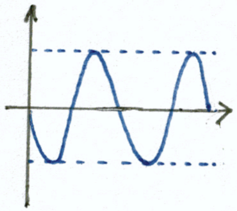


(1)　$0 \leq t \leq 2T'$ の範囲で、(a)箱の速度、(b)ベルトと箱の相対速度、(c)糸から箱に働く復元力、(d)ベルトから箱に働く静止摩擦力、を表す図を、**図1-3** の(ア)〜(オ)からそれぞれ選べ。

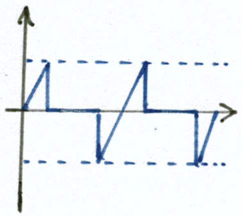
(2)　箱がベルトに対して滑り始める点Pでの箱の変位 s を L, F, μ, N を用いて表せ。

(3)　PQ間では、箱は問I(2)で考えた単振動と同じ運動をする。箱の最大変位 A を L, F, m, V, μ, N を用いて表せ。

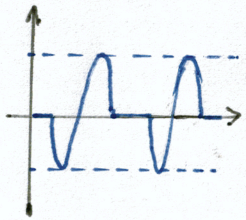
(4)　ベルトから箱に働く垂直抗力 N を大きくすると、箱の最大変位 A と箱の1周期の運動に要する時間 T' は、それぞれ、大きくなるか、小さくなるか、変わらないか、をその理由とともに答えよ。理由の説明に図を用いても良い。



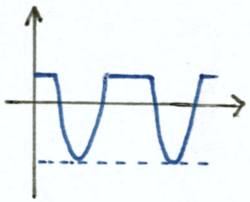
(ア)



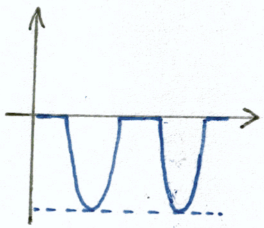
(イ)



(ウ)



(エ)



(オ)

東大 2007 第1問

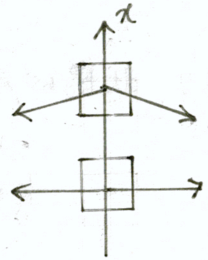
「何じゃこりゃ？」と思うかも知れませんが、なるべく単純なモデルで
なるべく複雑な現象を理解するのが、今回のテーマです。

・弓→ベルトでモデル化，N一定，V一定と近似

・弦→糸と箱でモデル化，箱は小さい

糸→張力Fはxにかかわらず一定

長さの変化は，図1-1(b)にかかわらず，無視



4本共同じ大きさの $\vec{F}$
向きだけ違う。

・弓と弦が同方向に運動時

→図1-1(c)下のようになり，静止まさつ力がはたらく
弓と弦は相対運動していない。

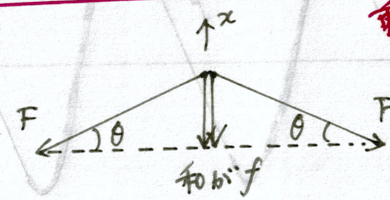
・弓と弦が逆方向に運動時

→図1-1(c)上のようになり，ベルトはわずかに浮いている
と考えてもよい（動まさつ力無視なので）。

・重力無視（書いていないが…）

I(1) たぶん単振動すると思って，$f=-kx+a$ の形を予想する。 重要

復元力を f とすると，



$$f=-F\sin\theta-F\sin\theta$$
$$=-2F\sin\theta$$

∴ $|2F\sin\theta|$

（$\sin\theta\fallingdotseq\theta$ より）$|2F\theta|$ でも可。

絶対値を答えさせるのは，負号ミスの失点に対する配慮？

これを x の1次関数の形にする

$$f\fallingdotseq-2F\tan\theta=-2F\cdot\frac{x}{\frac{L}{2}}=-\frac{4F}{L}x$$

∴ $\frac{4F}{L}|x|$

(2) $f=-\frac{4F}{L}x$ と $f=-m\omega^2x$ を比較して

$$\omega^2=\frac{4F}{mL}\qquad\therefore T=\frac{2\pi}{\omega}=\cancel{2}\pi\sqrt{\frac{mL}{\cancel{4}F}}$$

$$=\pi\sqrt{\frac{mL}{F}}$$

Ⅱ

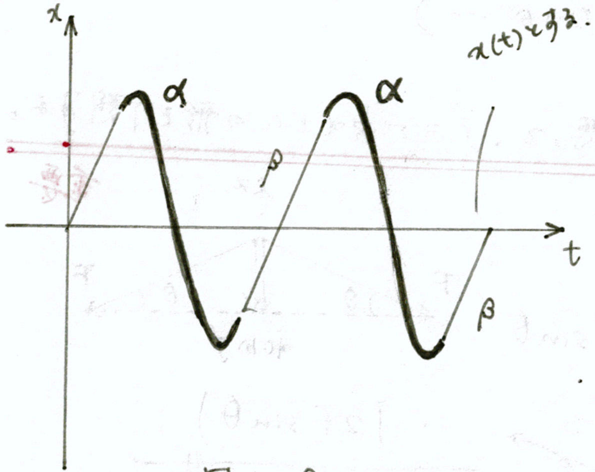


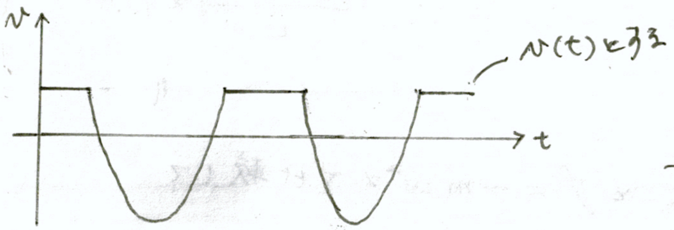
図1-2

・αの部分
I(2)の単振動，周期T
ベルトと箱の間に
動まさつ力は働かない.

・βの部分
ベルトと箱は一体となって
速さVの等速直線運動
静止まさつ力が働いている.

αの部分とβの部分を組み合わせると，
周期T'の運動になる。

(1) (a) 図1-2をtで微分したグラフを探す



A. (エ)

(b) 相対速度の公式 $V_{AB} = \underbrace{V_B}_{\text{物体}} - \underbrace{V_A}_{\text{観測者}}$ から

ベルトが観測者と考えて $v(t) - \underbrace{V}_{\text{一定}}$ のグラフを探す

A. (オ)

(c) I(1)の結果より kを定数として $f = -kx$ の形のものを探す.

A. (ア)

(d) 下図のRのことを訊いている。

動まさつ力は(ア)〜(オ)では無視しているから

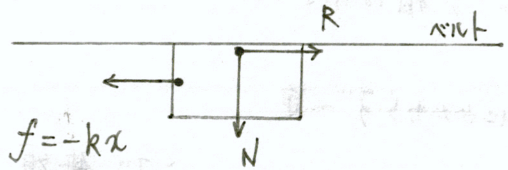
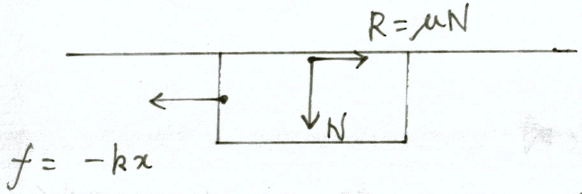


図1-2のαの部分では0
〃 のβ 〃 kx

A. (イ)

(2) 点P，P'で最大まさつ力になり，状態がβからαに変わる。

このとき、最大まさつ力は



$-kx = \mu N$

$k = \frac{4F}{L}$，$x = s$ を代入

$\frac{4F}{L} \cdot s = \mu N$

$s = \mu \frac{L}{4F} N$

(3) PQ間では、動まさつ力が働かないから、エネルギーが散逸しない。

エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}ks^2+\frac{1}{2}mV^2=\frac{1}{2}kA^2+0$$

$$\therefore ks^2+mV^2=kA^2$$

$$A=\sqrt{s^2+\frac{m}{k}V^2}=\sqrt{\left(\frac{\mu LN}{4F}\right)^2+\frac{mLV^2}{4F}}$$ //

sは最大変位ではなく、等速直線運動から単振動に変わる点。(2)の結果をsに代入した。

(4) (3)の結果を再掲すると

$$A=\sqrt{\left(\frac{\mu LN}{4F}\right)^2+\frac{mLV^2}{4F}}$$

N以外はすべて一定。従ってNを大きくすると、Aは大きくなる。 //

・αの単振動の周期 $T=\pi\sqrt{\frac{ml}{F}}$ =一定

・αの単振動の振幅AはN大で大 (さっきやった)

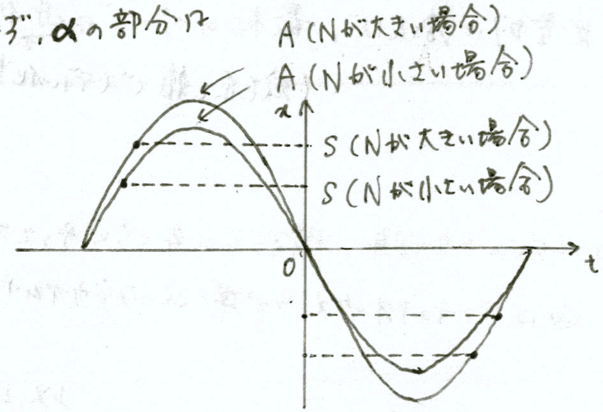
・αとβが切り替わるときのxは

$$x=s=\frac{\mu LN}{4F}=N に比例$$

・直線βの傾きはVで一定

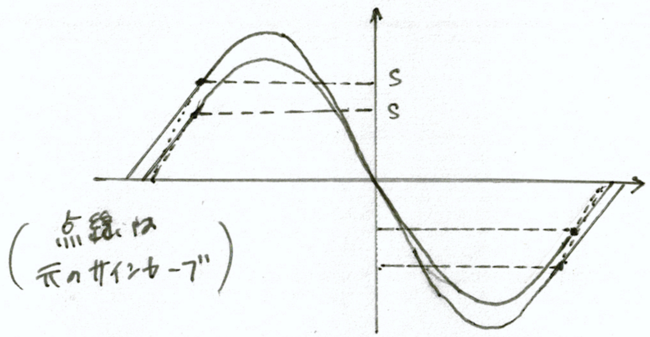
以上をふまえて、$t=\frac{3}{2}T'$を原点としてあらためてx-tグラフを書いてみる。

まず、αの部分は



のように変化する。グラフは原点中心に点対称である。

αとβを接続させると、βは傾き一定だから



となり、Nが大きいとT'も大きくなる。 //

このモデルから予言できることは、

① 弓で弦を強く押す（N大）と、音量は大きくなる（A大）。

② 〃 と、音程は下がる（T′大）。

などである。

実験と合えば、特に定量的に合えば、最初のページの近似の（弦を糸と箱でモデル化等）妥当性がハッキリする。

（趣味でコントラバスを7〜8年、ヴィオラを2年くらいやってますが、
②はアマチュアオーケストラで弾くくらいならウヤムヤです。）

以上