東京大学　2003年第1問

図1のように、質量 $2M$ の物体Aと質量 M の物体Bが、ばね定数 k の質量の無視できるばねによってつながれて、なめらかで水平な床の上に静止していた。また、物体Aはかたい壁に接していた。床の上を左向きに進んできた物体Cが、物体Bに完全弾性衝突して、跳ね返された。右向きを正の向きと定めると、衝突直後の物体Cの速度は $+u_1$ （ $u_1>0$ ）、物体Bの速度は $-v_1$ （ $v_1>0$ ）であった。その後、物体Bと物体Cが再び衝突することはなかった。

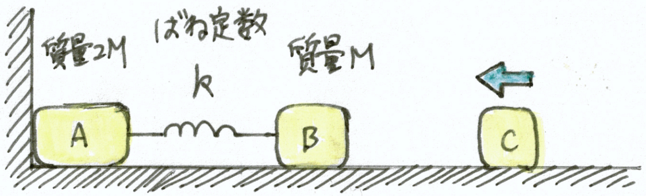


図1

I　まず、衝突前から物体Aが壁から離れるまでの運動を考える。

（1）　衝突前の物体Cの速度 u_0 （ $u_0<0$ ）を u_1 と v_1 を用いて表せ。

（2）　ばねが最も縮んだときの自然長からの縮み x （ $x>0$ ）を求めよ。

（3）　衝突してからばねの長さが自然長に戻るまでの時間 T を求めよ。

II　ばねの長さが自然長に戻ると、その直後に物体Aが壁から離れた。

（1）　やがて、ばねの長さは最大値に達し、そのとき物体Aと物体Bの速度は等しくなった。
その速度 v_2 を求めよ。

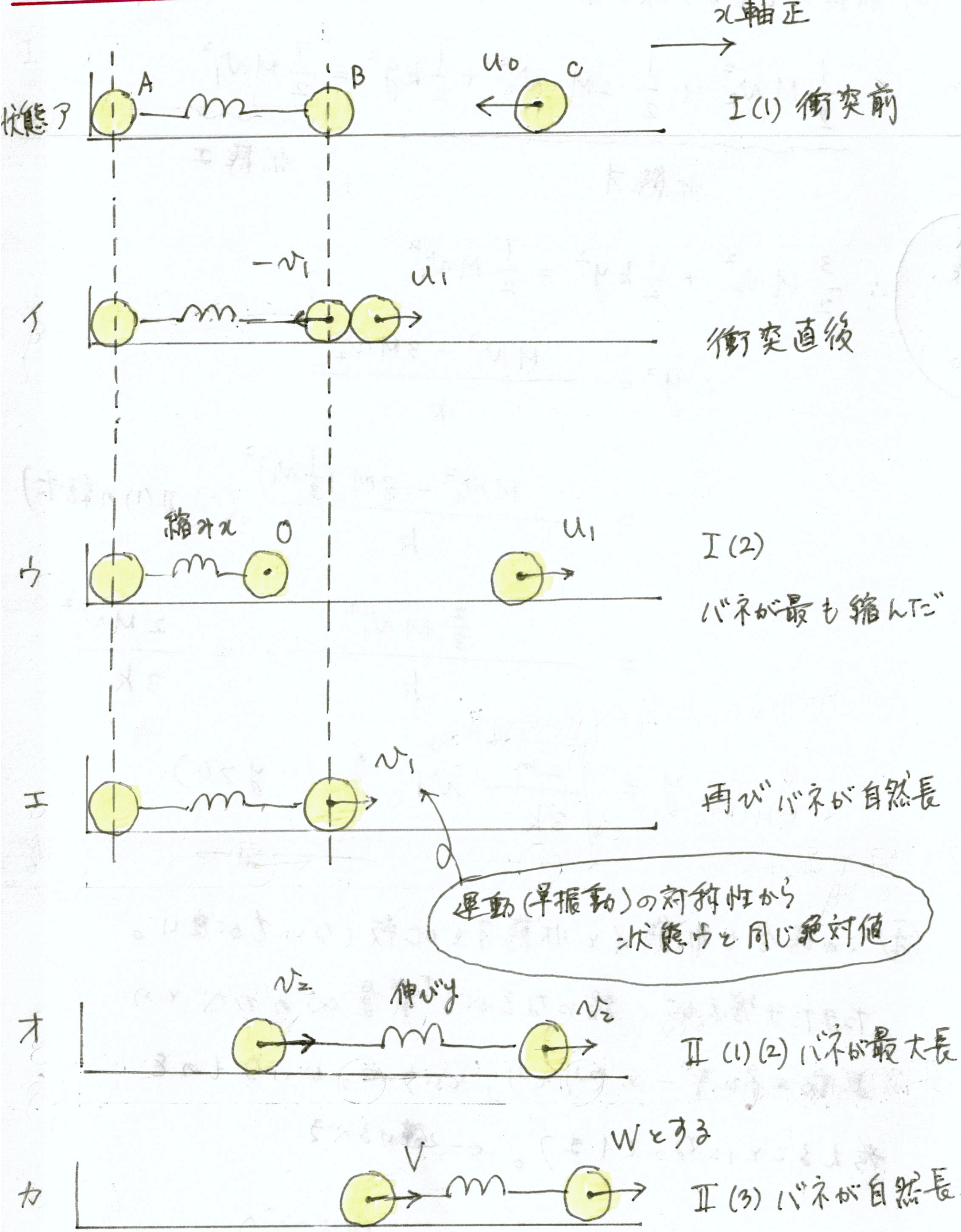
（2）　ばねの長さが最大値に達したときの自然長からの伸び y （ $y>0$ ）を求めよ。

（3）　その後ばねが縮んで、長さが再び自然長に戻ったとき、物体Aの速度は最大値 V に達した。 V を求めよ。

III　物体Aが壁から離れた後、物体Bと物体Cの間隔は、ばねが伸び縮みを繰り返すたびに広がっていった。

このことからわかる u_1 と v_1 の関係を、不等式で表せ。

2003 東大 第1問



I(1) 状態イから逆算して u_0 を求める。しかし、物体BとCから成る系に対して運動量保存則を適用しようとしても、できない。

Because
- 衝突時に系がバネから受ける力積が不明
- 物体Cの質量が与えられていない

そこで、はね返り係数より求める。

$$1 = -\frac{u_1-(-v_1)}{u_0-0} \qquad \therefore u_0 = -u_1 - v_1$$

(2) 物体AとBから成る系に対して、エネルギー保存則を適用すると

$$\underbrace{\frac{1}{2} M\cdot(-v_1)^2}_{状態イ} = \underbrace{\frac{1}{2} kx^2}_{状態ウ}$$

$$\therefore x = v_1\sqrt{\frac{M}{k}}$$

(3) (2)について、単振動の側面から考察してみる。

状態イからウまでは物体Aはカベに固定されているとみなして構わない(物体Bは左にしか動いていない)。

従って物体Bは単振動をし、その角振動数 $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$

次ページへ

速さの最大値に対しては「$v = r\omega$」が適用でき

$$v_1 = x\sqrt{\frac{k}{M}} \quad \therefore\ x = v_1\sqrt{\frac{M}{k}}$$

よって、(2)の答えを単振動の側面から得られた。

求めるTはこの単振動の周期の半分であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = \pi\sqrt{\frac{M}{k}}$$

訊かれる順番から、どうしても エネルギー保存を考察した後、単振動で考えることになってしまう気がする…。

II (1) 物体AとBから成る系に運動量保存則を適用すると、

$$\underbrace{Mv_1}_{\text{状態エ}} = \underbrace{2Mv_2 + Mv_2}_{\text{状態オ}}$$

$$\therefore\ v_2 = \frac{M}{3M}v_1 = \frac{1}{3}v_1$$

㊟ 状態イと状態オを比較してはいけない。その場合

$$\underbrace{(2Mv_2 + Mv_2)}_{\text{状態オ}} - \underbrace{M(-v_1)}_{\text{状態イ}} = \boxed{\text{状態イからオまでの間に系がカベから受けた力積}}$$

になり、v_2は出せない。　Mcも与えられていない。

(2) 物体AとBから成る系にエネルギー保存則を適用すると、

$$\underbrace{\frac{1}{2}Mv_2^2 + \frac{1}{2}\cdot 2M\cdot v_2^2 + \frac{1}{2}ky^2}_{\text{状態オ}} = \underbrace{\frac{1}{2}Mv_1^2}_{\text{状態エ}}$$

$$\therefore\ \frac{3}{2}Mv_2^2 + \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}Mv_1^2$$

$$\therefore\ y^2 = \frac{Mv_1^2 - 3Mv_2^2}{k}$$

$$= \frac{Mv_1^2 - 3M\left(\frac{1}{3}v_1\right)^2}{k} \quad (\because \text{II(1)の結果})$$

$$= \frac{\frac{2}{3}Mv_1^2}{k} = \frac{2Mv_1^2}{3k}$$

$$\therefore\ y = \sqrt{\frac{2m}{3k}}\,v_1 \quad (\because y > 0)$$

㊟ この場合も状態イと状態オを比較しない方が良い。

たまたま答えが一緒になるが、「質量∞のカベとの運動エネルギーのやりとり」というやっかいなものを考えることになってしまう。← 避けるべき

次ページへ

II (3) 物体AとBから成る系に，エネルギー保存則及び運動量保存則を適用すると，

$$\underbrace{\frac{1}{2}(2M)V^2+\frac{1}{2}MW^2}_{\text{状態カ}} = \underbrace{\frac{1}{2}Mv_1^2}_{\text{状態エ}} \quad \cdots ①$$

$$\underbrace{(2M)V + MW}_{\text{状態カ}} = \underbrace{Mv_1}_{\text{状態エ}} \quad \cdots ②$$

を得る。ただし，Wは状態カでの物体Bの速度（$W>0$）。

②より　$W = v_1 - 2V$

①に代入

$$\frac{1}{\cancel{2}}(2\cancel{M})V^2 + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{M}(v_1-2V)^2 = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{M}v_1^2$$

$$2V^2 + \cancel{v_1^2} - 4v_1V + 4V^2 = \cancel{v_1^2}$$

$$6V^2 - 4v_1V = 0$$

$$V(6V - 4v_1) = 0$$

$$V = \frac{2}{3}v_1 \quad (\because 題意より\ V \neq 0)$$

//

III 物体AとBの重心の位置を $x_G = x_G(t)$，速度を $V_G = V_G(t)$ とすると，

← x_Gをtの関数として見る，の意

$$x_G = \frac{Mx_A + 2Mx_B}{2M+M}$$

← 静止か，等速直線運動

$$V_G = \frac{Mv_A + 2Mv_B}{2M+M} = 一定$$

となる。ただし，$x_A = x_A(t)$，$x_B = x_B(t)$ はAとBの位置，$v_A = v_A(t)$，$v_B = v_B(t)$ はAとBの速度である。

V_G はtによらず一定であるから，状態オの時の値を使って求めると，

$$V_G = \frac{Mv_2 + 2M\cdot v_2}{2M+M} = \frac{M\cdot\frac{1}{3}v_1 + 2M\cdot\frac{1}{3}v_1}{2M+M} \quad (\because \text{II}(1))$$

$$= \frac{Mv_1}{3M} = \frac{1}{3}v_1$$

となる。問題文の条件は $u_1 - V_G > 0$ であるから

$$u_1 - \frac{1}{3}v_1 > 0$$

$$u_1 > \frac{1}{3}v_1$$

//

以上