東京大学　1999年第2問

荷電粒子の磁界中および電界中での運動を、**図2-1**の様に直交座標系を設定して考える。 $+z$ 方向を向いた磁束密度 B の一様な磁界があるものとして以下の設問に答えよ。

Ⅰ　ある時刻に陽子(電荷 e，質量 m)が x 軸方向の速度成分 0， y 軸方向の速度成分 $v(>0)$，z 軸方向の速度成分 0 を持っていた。

（1）この陽子の受ける力の大きさを求めよ。

（2）その力は、どちらの方向を向いているか。

（3）この陽子は円運動をする。その円の半径を導け。

Ⅱ　ある時刻に陽子が x 軸方向の速度成分 0， y 軸方向の速度成分 v_y， z 軸方向の速度成分 v_z を持っていた。この陽子はらせん運動をする。陽子がらせんを一周する間に z 軸方向に進む距離を求めよ。

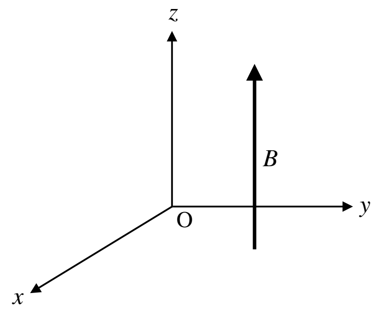
磁界中での荷電粒子の運動を利用して，陽子のエネルギー分析器を考案した。**図2-2**の様に $y \geqq 0$ の領域に $+z$ 方向を向いた磁束密度 B の一様な磁界をかける。陽子を磁界のある領域に向かって入射させるため，入射装置を磁界のない領域 $(y<0)$ に設置する。陽子は x 軸方向の速度成分 0、y 軸方向の速度成分 v_y， z 軸方向の速度成分 0 を持って原点 O を通過する。$y=0$ の平面（ $x-z$ 平面）上においた検出器により陽子の位置を測定する。

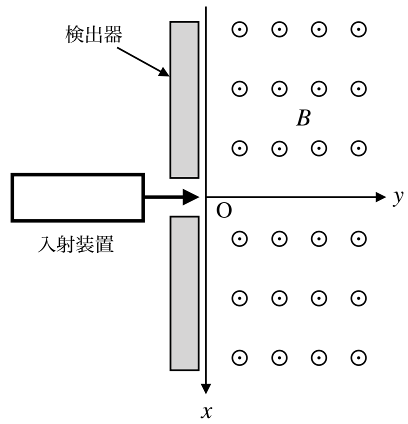
Ⅲ　陽子が運動エネルギー $W\left(=\frac{1}{2}mv_y^2\right)$ を持って入射した。陽子が検出される位置の x 座標および z 座標を W の関数として求めよ。

Ⅳ　陽子の入射装置の中に重水素の原子核（電荷 e，質量 $2m$ ）が混ざっていた。以後、陽子を p、重水素の原子核を d と表す。d も p と同様に y 軸方向のみの速度成分を持って原点 O を通過するものとする。運動エネルギー W_p を持つ p が運動エネルギー W_d を持つ d と同じ軌跡を描くとき、 W_d は W_p の何倍か。

Ⅴ　p と d を区別するため、 $y \geqq 0$ の領域で $+z$ 方向に一様な電界 E をかけた。運動エネルギー W_p を持って入射された p が検出される位置の x 座標および z 座標を求めよ。

Ⅵ　設問Ⅳで軌跡が重なり合っていた p と d はこの電界 E をかけることによって分離される。d が検出される位置の x 座標及び z 座標を求めよ。

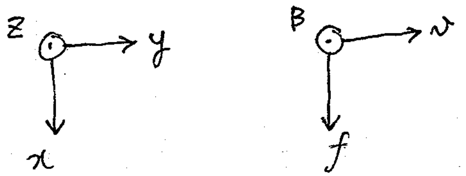




東大 1999 第2問

I (1) 求める力の大きさを f とすると、 $f = evB$

(2) フレミングの左手の法則により



x軸正の向き

(文字は e を使っているが、陽子であることに注意)

(3) 等速円運動であるから、運動方程式は、

$$m\frac{v^2}{R} = evB$$

となる(ただし、R は等速円運動の半径)。

$$\therefore\ R = \frac{mv^{\cancel{2}}}{e\cancel{v}B} = \frac{mv}{eB}$$

II 陽子がらせんを一周する時間を T とすると、

$$T = \frac{2\pi R}{v_y} = \frac{2\pi\left(\frac{m\cancel{v_y}}{eB}\right)}{\cancel{v_y}} = \frac{2\pi m}{eB}$$

(∵ I(3)の結果)

従って求める距離 Δz は

$$\Delta z = v_z T = \frac{2\pi m v_z}{eB}$$

III $v_y = \sqrt{\frac{2W}{m}}$ 及び I(3)の結果を用いて

$$x = 2R = 2\cdot\frac{m\sqrt{\frac{2W}{m}}}{eB} = \frac{2\sqrt{2mW}}{eB}$$

$v_z = 0$ であるから $\Delta z = 0$。

つまり $z = 0$

IV「同じ軌跡を描く ⇔ 半径Rが等しい」であるから

陽子と重陽子の描く円の半径をそれぞれ R_p, R_d とすると、

$$\frac{R_d}{R_p} \underset{\text{I(3)}}{=} \frac{\frac{m_d v_d}{eB}}{\frac{m_p v_p}{eB}} \underset{\text{IIIの途中}}{=} \frac{m_d\sqrt{\frac{2W_d}{m_d}}}{m_p\sqrt{\frac{2W_p}{m_p}}} = \sqrt{\frac{m_d W_d}{m_p W_p}} = \sqrt{\frac{2m\cdot W_d}{m\cdot W_p}} \underset{\text{題意}}{=} 1$$

が成立する。

$$\therefore\ \frac{W_d}{W_p} = \frac{1}{2}$$

V　電界Eはxy平面上の運動に影響を与えないから，

x座標はIIIと同様に $\dfrac{2\sqrt{2mW_p}}{eB}$ …☆

陽子がらせんを半周する時間 T_p は IIの結果より

$$T_p = \frac{T}{2} = \frac{\pi m}{eB} \quad \cdots ①$$

また，陽子のz方向の加速度 a_p は，運動方程式

$$m a_p = eE$$

より　$a_p = \dfrac{eE}{m}$ （tに関して一定） …②

①，②より z座標は $\dfrac{1}{2}a_p T_p^2 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{eE}{m}\cdot\left(\dfrac{\pi m}{eB}\right)^2$

$$= \frac{\pi^2 m E}{2eB^2}$$

VI　x座標は☆のmを2mに，W_pをW_dに取り替えて

$$\frac{2\sqrt{2(2m)W_d}}{eB} = \frac{4\sqrt{mW_d}}{eB}$$

dがらせんを半周する時間 T_d は，IIのTでmを2mに取り替えたものが1周する時間だから

$$T_d = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi\cdot(2m)}{eB} = \frac{2\pi m}{eB}$$

また，重陽子のz方向の加速度 a_d は運動方程式

$$(2m)\,a_d = eE$$

より　$a_d = \dfrac{eE}{2m}$ （tに関して一定） …④

③，④より z座標は $\dfrac{1}{2}a_d T_d^2 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{eE}{2m}\cdot\left(\dfrac{2\pi m}{eB}\right)^2$

$$= \frac{\pi^2 m E}{eB^2}$$