東大　1998年第1問

図1のように、無重力の宇宙空間に半径 R の巨大な円筒形の密閉容器（宇宙ステーション）が浮かんでいる。この内陸上で地球上と同じような生活を実現させるために、宇宙ステーションを円筒の中心軸の回りに一定の角速度 ω で回転させ、重力に相当する力を人工的に作り出す。円筒の内壁上には観測者S、円筒の外には静止している観測者Tがいるとして、以下の設問に答えよ。なおここでは図1に描かれた面内で起こる運動のみを考える。また、観測者Sから見て内壁に沿う図1中の矢印の方向を $+x$ 方向とせよ。

I　円筒の内壁上に立っている観測者Sがバネを持ち、物体Aをつり下げるとバネは L だけ伸びた。

（1）観測者Sがそのまま内壁に対して一定の速さ v (>0) で $+x$ 方向に運動したとき、バネの伸びはいくらになるか。

（2）観測者Sが物体Aをつるしたバネを持ち、内壁に垂直に立てたはしご（図1）を $\frac{R}{2}$ の高さまで登ったときのバネの伸びはいくらか。

（3）地球上で同じバネに同じ物体Aをつるすと、バネは同じく L だけ伸びた。宇宙ステーションの角速度 ω を地球上の重力加速度 g を用いて表せ。

II　円筒の内壁に固定され回転の中心Oに向いている打ち上げ装置（図1）を使い、ボールを打ち上げ装置に対して速さ u で打ち上げた。

（1）観測者Tが見るとこのボールはどのような運動をするか。理由をつけて答えよ。また、観測者Tから見たボールの初速度の大きさを ω, R, u で表せ。

（2）このボールが打ち上げられてから宇宙ステーションの内壁に衝突するまでの時間 t_1 を求めよ。

（3）打ち上げ装置から見て、このボールは内壁上のどの地点に落下するか。「同じ場所」、「 $+x$ 方向に離れた場所」、「 $-x$ 方向に離れた場所」、「これだけではわからない」の中から選び、そう判断した理由を述べよ。

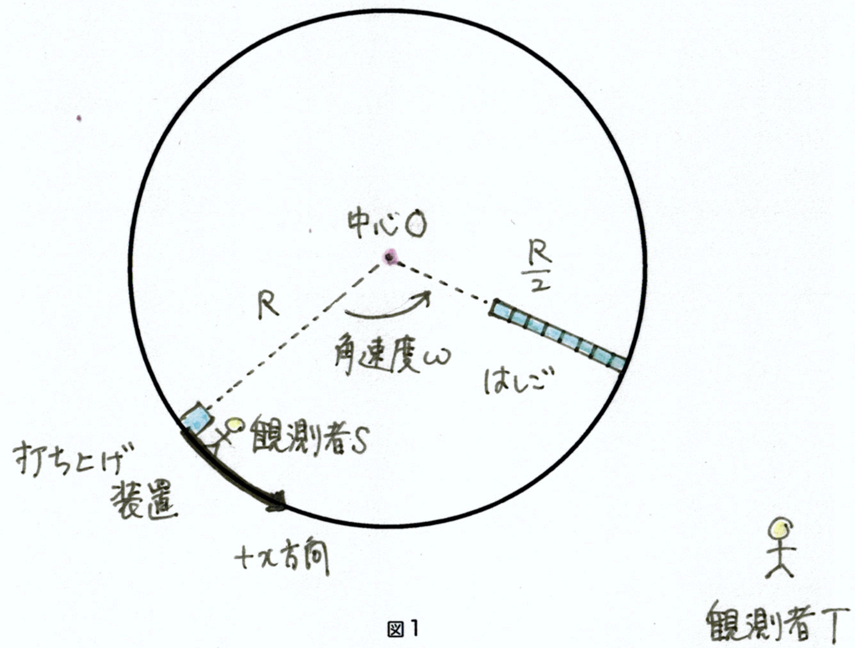
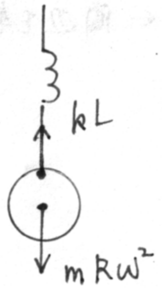


図1

（実際の観測者や打ちとげ装置の大きさは、半径Rに比べて十分小さい）

東大 1998 第1問

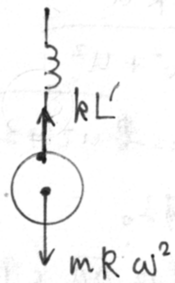
I (1) Sが内壁に対して静止しているとき、Sを静止させた系での力のつり合いは、ばね定数をkとして



$$kL = mR\omega^2 \quad \cdots ㋐$$

$$\therefore k = \frac{mR\omega^2}{L} \quad \cdots ㋑$$

Sが内壁に対して+x方向に速さvで動いているとき、Sを静止させた系での力のつり合いは



$$kL' = mR\omega'^2$$

(L', ω'は新しいバネの伸び、角速度)

ここで

$$\omega' = \frac{v'}{R} = \frac{R\omega + v}{R}$$

← 古い速さ+v

(v'は新しい速さ)

であるから

$$L' = \frac{mR}{k}\cdot\left(\frac{R\omega+v}{R}\right)^2$$

$$= \cancel{m}\cancel{R}\cdot\frac{L}{\cancel{m}\cancel{R}\omega^2}\cdot\left(\frac{R\omega+v}{R}\right)^2 \quad (\because ㋑)$$

$$= L\cdot\left(\frac{R\omega+v}{R\omega}\right)^2 = L\cdot\left(1+\frac{v}{R\omega}\right)^2$$

//

(2) 求める長さをL''とすると、㋐と同様に

$$kL'' = m\cdot\left(\frac{R}{2}\right)\cdot\omega^2$$

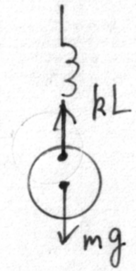
$$\therefore L'' = \frac{mR\omega^2}{2k} = \frac{mR\omega^2}{2}\cdot\frac{L}{mR\omega^2}$$

$$= \frac{L}{2}$$

へえ…。

//

(3) 地球上での力のつり合いは



$$kL = mg$$

㋐と比較して $R\omega^2 = g$ $\therefore \omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$ //

脱線 ガンダムの設定の記憶 $R = 10\,\mathrm{km} = 10^4\,\mathrm{m}$, $g = 10\,\mathrm{m/s}$ を入れると

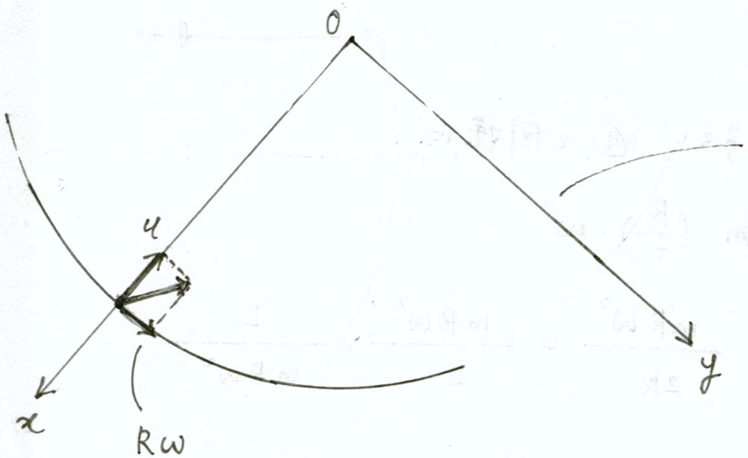
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\cdot 3}{\sqrt{\frac{10}{10^4}}} \fallingdotseq \frac{2\cdot 3}{\frac{1}{32}} \fallingdotseq 200\ [\mathrm{s}]$$

ふーん…。

Ⅱ (1) ボールは運動中に力を受けないので、等速直線運動をする。

また、座標系を図のようにとり、打ち上げた瞬間 $(t=0)$ で

ボールは $(R, 0)$ にあるとする。



座標軸は外から見て動かないとする。
また、いつもと同じように反時計回りに x 軸，y 軸を取ると吉。

求める初速度の大きさは $\sqrt{u^2+(R\omega)^2}$

(2) ボールの軌跡は

$$x(t) = R - ut \quad \cdots ①$$

$$y(t) = (R\omega)t \quad \cdots ②$$

であり，これが再び内壁に到達するとき

$$\{x(t_1)\}^2 + \{y(t_1)\}^2 = (R-ut_1)^2 + \{(R\omega)t_1\}^2$$

$$= R^2$$

が成立する。従って

$$\left(1 - \frac{u}{R}t_1\right)^2 + \omega^2 t_1^2 = 1$$ ← 両辺を無次元化

$$1 - 2\frac{u}{R}t_1 + \frac{u^2}{R^2}t_1^2 + \omega^2 t_1^2 = 1$$

$$\left(\frac{u^2}{R^2} + \omega^2\right)t_1^2 - 2\frac{u}{R}t_1 = 0$$

$$t_1\left\{\left(\frac{u^2}{R^2} + \omega^2\right)t_1 - 2\frac{u}{R}\right\} = 0$$

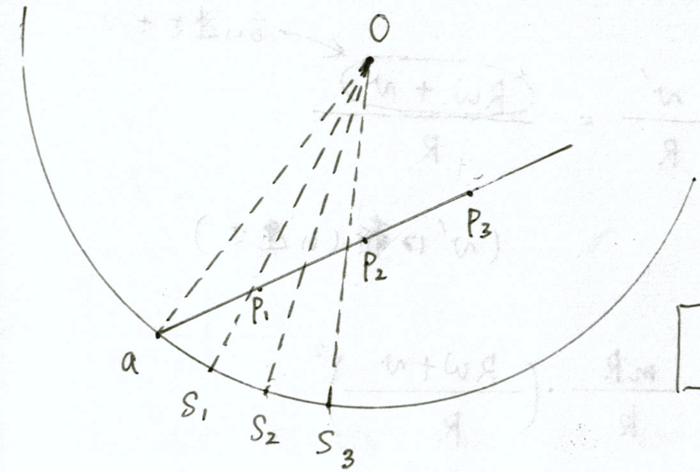
必ず次元チェック!!

題意より $t_1 \neq 0$ であるから $t_1 = \dfrac{2Ru}{R^2\omega^2 + u^2}$

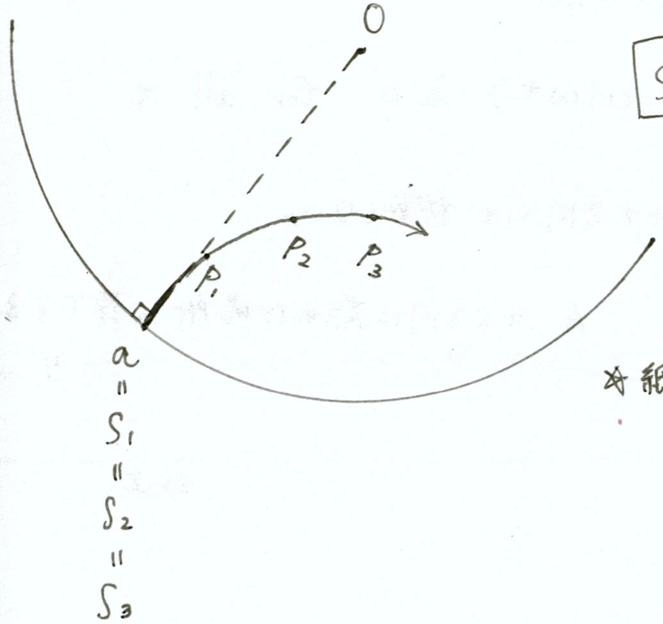
(3) 観測者Tから見たボールの運動を，下図に書いてみる。

S_1 と P_1，S_2 と P_2，S_3 と P_3 は同時刻とする。

aでの初速度は $\overline{Oa}$ と平行でない。



Sから観測



※紙を重ね合わせて書いたので、たぶん正確です。

今度は観測者Sから見たボールの運動を書いてみる。

さっきと違い、$\overline{Oa}$ と $\overline{OS_1}$ と $\overline{OS_2}$ と $\overline{OS_3}$ はすべて重なるように書いてある。作図でわかるように、常に＋x方向にボールは運動する。

従って、＋x方向に離れた場所に落下する。//

<別解1>

Sから見たボールの軌跡を $(X(t), Y(t))$ とすると

$$X(t) = R - ut - R\cos\omega t \quad \cdots ㋔$$

$$Y(t) = (R\omega)t - R\sin\omega t \quad \cdots ㋕$$

と書けます。これは、外から見た座標系での表現（㋒、㋓）から、観測者Sの動き（$R\cos\omega t$, $R\sin\omega t$）を引いたものです。

自分を止めた座標系を作りたければ、自分の動きを消せばOKです。

㋔、㋕の形を調べるため、媒介変数表示の増減表をつくってみます。

$$\frac{dX}{dt} = -u + R\omega\sin\omega t$$

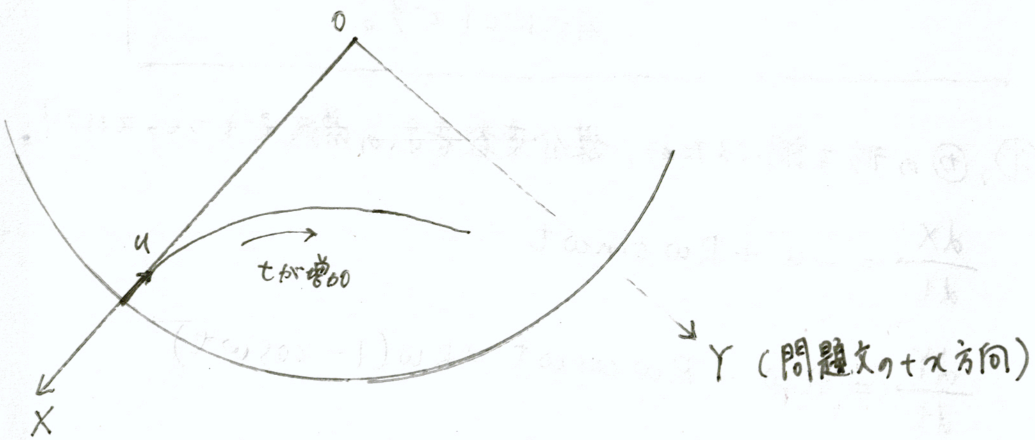
$$\frac{dY}{dt} = R\omega - R\omega\cos\omega t = R\omega(1-\cos\omega t)$$

となるので

t	0		$\frac{2\pi}{\omega}$	
$\frac{dX}{dt}$	$-u$	u, R, ωの値により正負が変わる		
X	0	u, R, ωの値により ↗ か ↘		
$\frac{dY}{dt}$	0	＋	0	＋
Y	0	↗		

となり，グラフの概形は書きにくいことがわかりましたが，

tが増加するとYも常に増加とわかりました。



従って　+x方向に離れた場所に落下する

〈別解2〉

Sから見たボールの軌跡を$(X(t), Y(t))$とすると，

$$X(t) = R - ut - R\cos\omega t \quad \cdots ⓔ$$

$$Y(t) = (R\omega)t - R\sin\omega t \quad \cdots ⓕ$$

ここまでは別解1と同じですが，増減表をつくっているうちに$\dfrac{dY}{dt}$の計算だけでよいことに気づきました。

$$\frac{dY}{dt} = R\omega - R\omega\cos\omega t$$

$$= R\omega(1 - \cos\omega t) \geqq 0 \quad \text{for all } t$$

であるから，ボールは+x方向にしか移動しない。

A．+x方向に離れた場所に落下する

以上