東京大学　1995年第1問

図1のように、直線と半径 r の円弧からなる軌道を考える。円弧は点C、E、Fで軌道の直線部分と滑らかにつながっている。初速度0で点Aから質量 m の球が斜面に沿ってすべり落ちるとき、球は軌道に沿って摩擦なしで運動する。点B、F、Hは水平線上にあり、直線部分ABは水平線と角度 α をなす。重力加速度を g とし、球の半径は十分小さいとする。

I　この球が軌道から受ける最大の抗力を求めよ。

II　出発点Aでの球の高さ h がある値 h_0 をこえると、球が運動の途中で軌道から浮き上がる。h_0 を求めよ。

III　$h>h_0$ のとき、球が軌道から飛び上がり、点Hに落下した。このとき h の値を求めよ。

IV　高さ h を適当に選んで、球が軌道から浮き上がらずに点Gに到達するためには、角度 α がある条件を満たすことが必要である。この条件を求めよ。

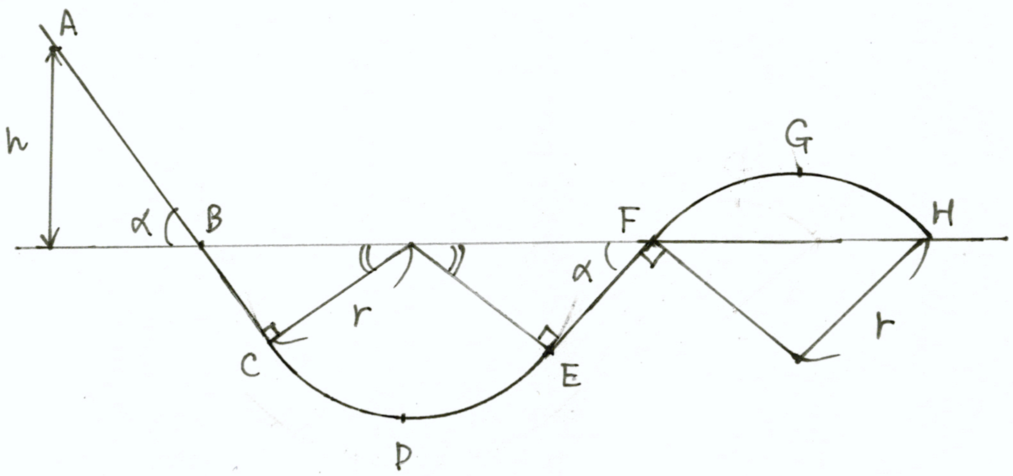
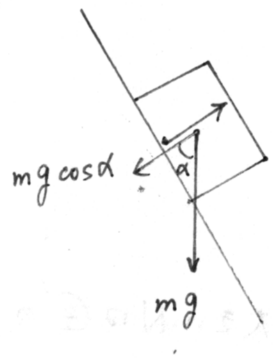


図 1

東大 1995 第1問

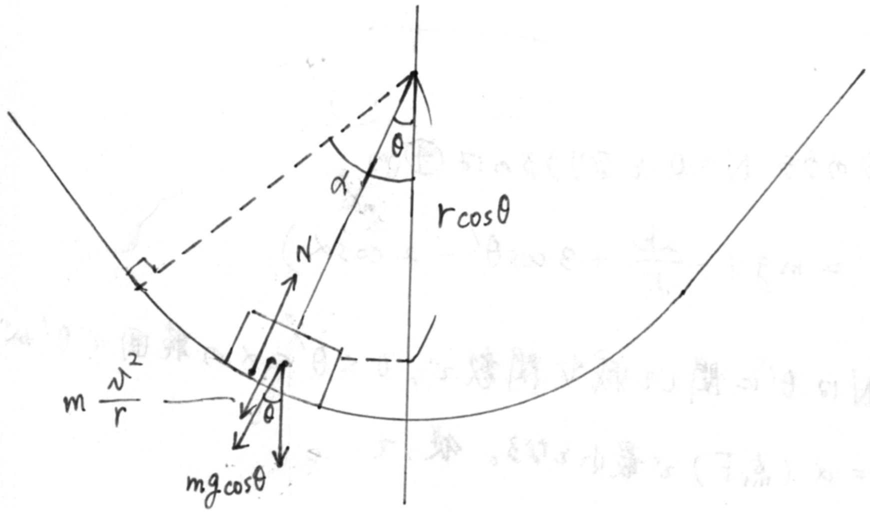
I　AC間，CE間，EF間，FH間の抗力N を求め，比較する。

AC間



$$N = mg\cos\alpha \quad \cdots ①$$

CE間　対称性により，CD間のNがわかればDE間のNもわかる。（以下同様）



図のようにθをとると，エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(h + r\cos\theta)$$

また，回転系で考えたとき，法線方向の力のつり合いは（球を固定した系）

$$N = m\frac{v^2}{r} + mg\cos\theta$$

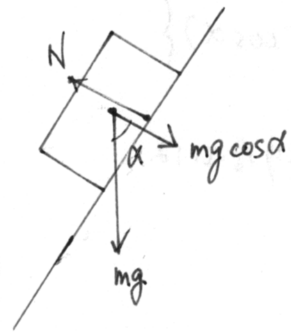
以上より

$$N = \frac{2mg}{r}(h + r\cos\theta) + mg\cos\theta$$

$$= mg\left(\frac{2h}{r} + 3\cos\theta\right) \quad \cdots ②$$

EF間　対称性により，BC間と同じ。

$$N = mg\cos\alpha \quad \cdots ③$$



Nの推移をイメージするには，ジェットコースターに乗った時

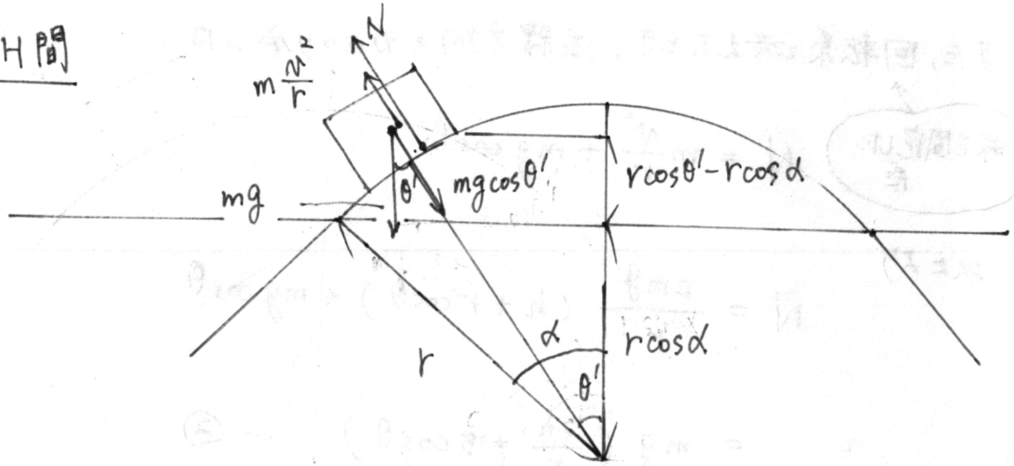
体重 軽くなるとき ⇔ 抗力小

体重 重くなるとき ⇔ 抗力大

を思い出すといいかも。

次ページへ

FH間



図のようにθ'をとるとエネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg\{h - (r\cos\theta' - r\cos\alpha)\}$$

また，回転系において，法線方向の力のつり合いは

$$N + m\frac{v^2}{r} - mg\cos\theta' = 0$$

以上より

$$N = -m\frac{v^2}{r} + mg\cos\theta'$$

$$= mg\left(-\frac{2h}{r} + 3\cos\theta' - 2\cos\alpha\right) \cdots ④$$

①～④のうち最も大きくなるNを調べる。

- ①と③は定数
- ②の最大値は $mg\left(\frac{2h}{r} + 3\right)$ at $\theta = 0$
- ④の最大値は $mg\left(-\frac{2h}{r} + 3 - 2\cos\alpha\right)$ at $\theta' = 0$

であることを使うと，

- $mg\cos\alpha$ $\cdots$ ①，③
- $mg\left(\frac{2h}{r} + 3\right)$ $\cdots$ ②'
- $mg\left(-\frac{2h}{r} + 3 - 2\cos\alpha\right)$ $\cdots$ ④'

の比較となる。$\frac{h}{r} > 0$，$0 < \cos\alpha < 1$より，最も大きいNは②'の

$$N = mg\left(\frac{2h}{r} + 3\right)$$

//

Ⅱ ①～④のうち$N = 0$となりうるのは④の

$$N = mg\left(-\frac{2h}{r} + 3\cos\theta' - 2\cos\alpha\right)$$

である。Nはθ'に関して減少関数で，$0 < \theta' < \alpha$の範囲でθ'が動くから，$\theta' = \alpha$（点F）で最小となる。従って

$$0 = mg\left(-\frac{2h_0}{r} + 3\cos\alpha - 2\cos\alpha\right)$$

これを解いて

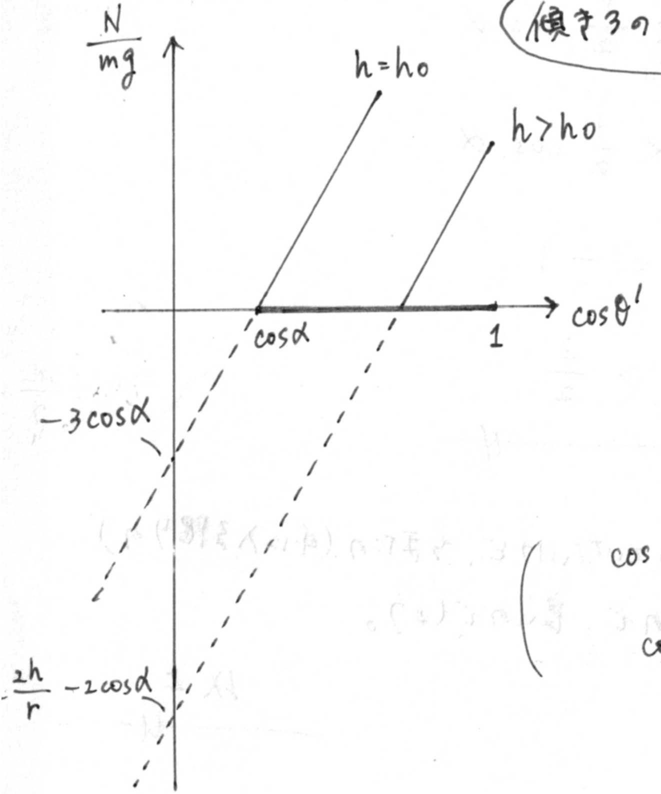
$$h_0 = \frac{r}{2}\cos\alpha$$

III どこで球が軌道から飛び上がるかを見るため，

$$N = mg\left(-\frac{2h}{r} + 3\cos\theta' - 2\cos\alpha\right) \quad \cdots ④（再掲）$$

が，θ' と h に対してどのように振舞うか調べてみる。

傾き3の直線群！



（$\cos\theta'$ の定義域は $\cos\alpha < \cos\theta' < 1$）

物体が円弧FHを通過すると，$\cos\theta'$ は $\cos\alpha$ から徐々に大きくなるから，

点Fでいきなり $N < 0$ になることがわかる。

つまり，$h > h_0$ なら，点Fで必ず浮かび上がる。

改めて点Fを原点かつ時刻 $t=0$ にとり，点Fでの速さを v とすると，物体は

$$\begin{cases} v_x(t) = v\cos\alpha & \cdots ㋐ \\ v_y(t) = v\sin\alpha - gt & \cdots ㋑ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = (v\cos\alpha)t & \cdots ㋒ \\ y(t) = (v\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 & \cdots ㋓ \end{cases}$$

の放物運動をする。また，エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \quad \cdots ㋔$$

である。

点Hで落下するには，$y=0$ のとき $x = 2r\sin\alpha$ になればよい。

㋒，㋓から t を消去する。

㋒より

$$t = \frac{2r\sin\alpha}{v\cos\alpha} = \frac{2r}{v}\tan\alpha$$

㋓に代入

$$0 = \cancel{v}\sin\alpha\cdot\frac{2r}{\cancel{v}}\tan\alpha - \frac{1}{\cancel{2}}g\frac{\cancel{4}^{2}r^2}{v^2}\tan^2\alpha$$

両辺 $\div\, 2r\tan\alpha$

$$0 = \sin\alpha - \frac{gr\tan\alpha}{v^2}$$

$$\therefore \frac{gr\tan\alpha}{v^2} = \sin\alpha$$

$$v^2 = gr\frac{\tan\alpha}{\sin\alpha}$$

$$= gr\frac{1}{\cos\alpha}$$ ← これがFにおけるvを2乗したもの

㋔に代入

$$\frac{1}{2}mgr\cdot\frac{1}{\cos\alpha} = mgh$$

$$\therefore h = \frac{r}{2\cos\alpha}$$

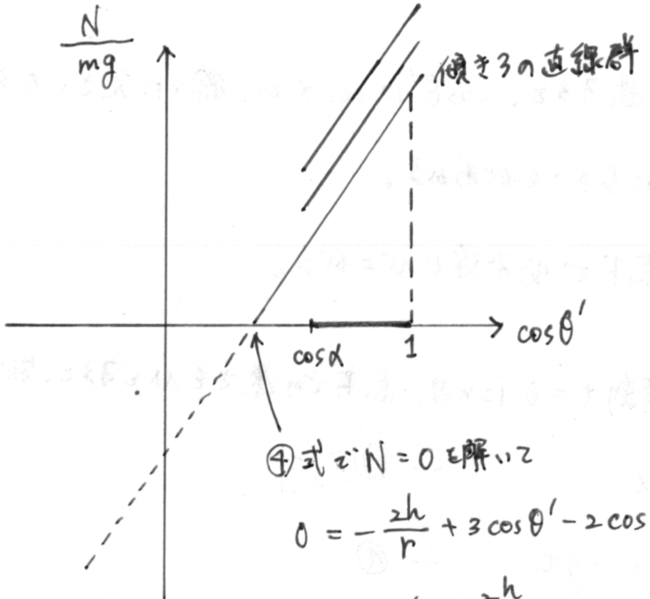
- IV 浮かび上がらずに点Gに到達するためには，

「FからGまで，常に$N>0$」かつ「エネルギー的に点Gに到達できる」

を満たせばよい。

↑学力に余裕がないと忘れやすい

次ページへ



④式で N=0 を解いて

$$0 = -\frac{2h}{r} + 3\cos\theta' - 2\cos\alpha$$

$$3\cos\theta' = \frac{2h}{r} + 2\cos\alpha$$

$$\cos\theta' = \frac{1}{3}\left(\frac{2h}{r} + 2\cos\alpha\right)$$

と作図できるから、$\cos\alpha < \cos\theta' < 1$ の範囲で、常に $N > 0$ で

あるためには

$$\underbrace{\frac{1}{3}\left(\frac{2h}{r} + 2\cos\alpha\right)}_{\text{上図の左}} < \underbrace{\cos\alpha}_{\text{上図の右}}$$

$$\frac{2h}{r} + 2\cos\alpha < 3\cos\alpha$$

$$\frac{2h}{r} < \cos\alpha$$

$$h < \frac{r}{2}\cos\alpha \quad \cdots ⑤$$

また、エネルギー保存より（もしくはA点はG点より高くないといけないから）

$$r - r\cos\alpha < h \quad \cdots ⑥$$

$\cos\alpha$ の条件を出すため、⑤と⑥をまとめる。

$$r(1-\cos\alpha) < h < \frac{r}{2}\cos\alpha$$

rとhがジャマなので、この式の最左辺と最右辺を比較すると、

$$r(1-\cos\alpha) < \frac{r}{2}\cos\alpha$$

$$1 - \cos\alpha < \frac{1}{2}\cos\alpha$$

$$-\frac{3}{2}\cos\alpha < -1$$

$$\cos\alpha > \frac{3}{2}$$

必要条件しか求めていないけど、ちまたの（手に入る限りの）模範回答もそうなので、良いのでしょう。

以上