東京大学　1994 年第 1 問

傾斜したベルトが一定の速さ V_0で、左上向きまたは右下向きに動く装置がある。はじめに、**図 1-1** のようにベルトを上向きに動かし、質量 m の物体をのせ、物体の高さを変えず静止するよう傾斜角 θを設定した。ベルトと物体の静止摩擦係数は μ_s（注：static と思われる）で動摩擦係数は μ_k（注：kinetic と思われる）であり、μ_sは μ_kより大きい。重力の加速度は gである。

I　動摩擦係数 μ_kを角度 θで表せ。

次に、**図 1-2** のように物体をばね定数 k, 自然長 l_0のばねで支柱とつなぎ、ベルトに沿ってばねが伸び縮みし、物体がベルト上で運動できるようにした。ベルトを下向きに動かし、物体を種々の条件でベルトにのせると、物体はそれらに対応したふるまいをした。ばねの質量は無視出来るとし以下の設問に答えよ。

II　ばねの伸びの長さが l_Aになる点 O で、物体を静かにベルトにのせると、その点で物体は静止した。伸びの長さ l_Aを求めよ（k、m、g、θを用いて表せ）。

III　ばねをさらに伸ばし、物体を点 O から距離 A_1離れた点で静かにベルトにのせると、物体は点 O のまわりに単振動を始めた。振動の周期 Tと点 O を通過する速さ V_1を求めよ。

IV　物体をベルトと同じ速さ V_0で運動させながら、点 O でベルトにのせた。はじめ物体はベルトに付いて動いたが、ばねの伸びが l_Bになる点で物体はベルトに対し滑り始め、点 O から距離 A_2 離れた点に達して向きを変え、点 O を速さ V_2で通過した。ばねの伸びの差　$l=l_B-l_A$　を求め、m、g、θ、k、μ_s、μ_kで表現せよ。また距離 A_2 、速さ V_2を m、k、V_0、l を使って表せ。

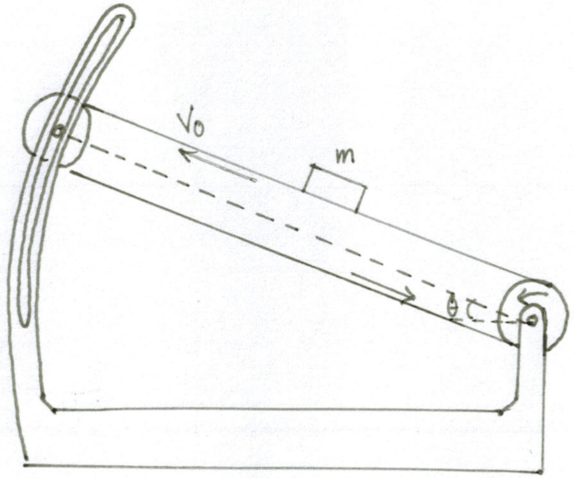


図 1－1

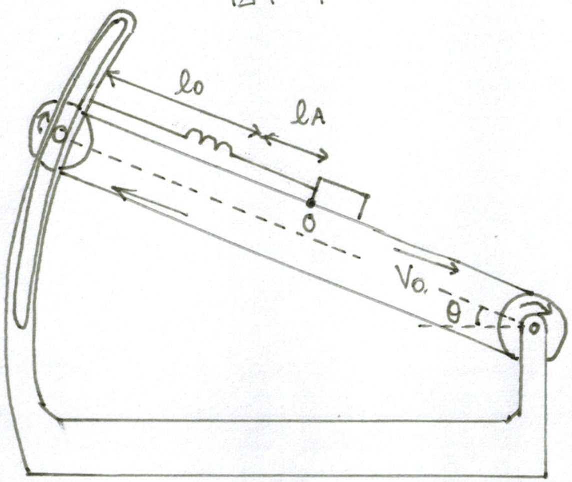
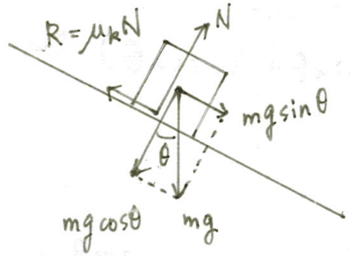


図 1－2

東大 1994 第1問

I

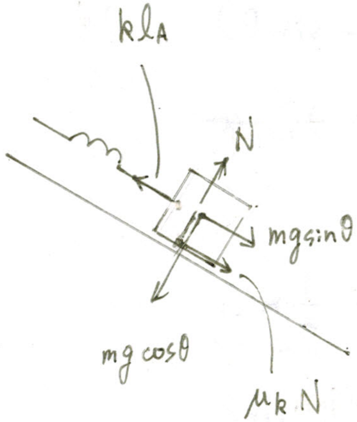


力のつり合いより

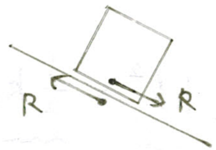
$$\begin{cases} \mu_k N - mg\sin\theta = 0 \\ N - mg\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \mu_k = \frac{mg\sin\theta}{mg\cos\theta} = \tan\theta$$

II



物体とベルトの相対運動がこのようになるから



動まさつ力はこのようにかかる。

力のつり合いより

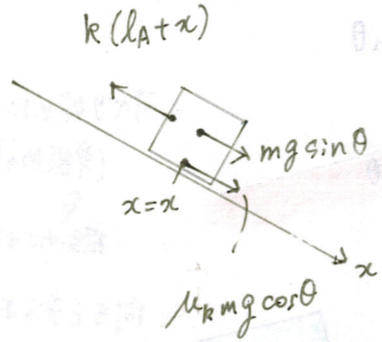
$$\begin{cases} kl_A - \mu_k N - mg\sin\theta = 0 \\ N - mg\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$$kl_A = \mu_k N + mg\sin\theta$$

$$= \mu_k mg\cos\theta + mg\sin\theta = 2mg\sin\theta \quad (\because \text{I の結果})$$

$$\therefore l_A = \frac{2mg\sin\theta}{k}$$

III 物体をベルトに乗せた直後の動まさつ力の向きは，ばねの伸びにかかわらずIIと同じである。なぜなら，「静かにベルトに乗せた」とあるので，物体とベルトの相対速度も変わっていないからである。点Oを原点にとり，斜面下向きにx軸をとる。



物体に加わる力Fは

$$F = mg\sin\theta + \mu_k mg\cos\theta - k(l_A+x)$$

$$= mg\sin\theta + mg\sin\theta - 2mg\sin\theta - kx$$

$$= -kx \quad (\because \text{I, II の結果})$$

公式「$F=-m\omega^2 x$」と比較して

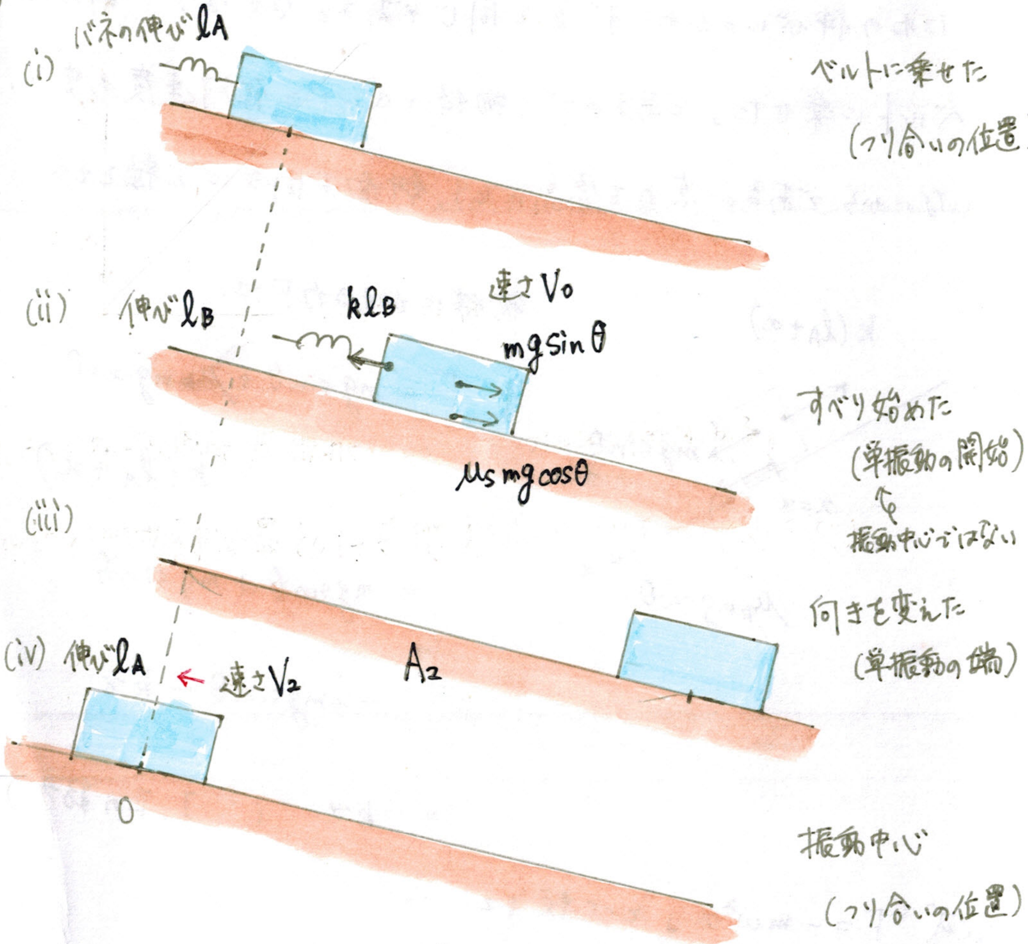
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

次ページへ

Ⅲ つづき

「$v = r\omega$」より $V_1 = A_1\omega = A_1\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ //

Ⅳ



まとめると上図のようになる。

図(ii)より $kl_B - mg\sin\theta - \mu_s mg\cos\theta = 0$

$$l_B = \frac{mg}{k}(\sin\theta + \mu_s\cos\theta)$$

Ⅱの結果と合わせて

$$l = l_B - l_A = \frac{mg}{k}(\sin\theta + \mu_s\cos\theta) - \frac{2mg}{k}\sin\theta$$

$$= \frac{mg}{k}(\mu_s\cos\theta - \sin\theta)$$ //

単振動のエネルギー保存則より

$$\underbrace{\frac{1}{2}mV_0^2 + \frac{1}{2}kl^2}_{\text{状態 (ii)}} = \underbrace{\frac{1}{2}kA_2^2}_{\text{(iii)}} = \underbrace{\frac{1}{2}mV_2^2}_{\text{(iv)}}$$

$$\therefore\ A_2 = \sqrt{l^2 + \frac{mV_0^2}{k}}$$ //

$$V_2 = \sqrt{V_0^2 + \frac{kl^2}{m}}$$ //

以上 //