東大　1992年第1問

質量mの小球Aと水平な台Bがある。鉛直上向きにy軸をとる。台はy方向に振幅a, 周期Tで単振動しており、時刻tでの変位Y(t)および速度W(t)はそれぞれ

$$Y(t)=-a\cos\frac{2\pi}{T}t,\ W(t)=b\sin\frac{2\pi}{T}t$$

で表されるものとする。ただし、bは速度の最大値である。小球Aは最初、位置y = hに支えられ静止していたが、ある時刻に支えがはずされ、台に向かって初速度0で自由落下を始める（**図1－1**）。Aはやがて B に衝突するが、Bも振動しているので、衝突後のAの速度はBの速度に依存する。小球Aと台Bとの間のはねかえり係数は1に等しい（すなわち完全弾性衝突）とする。また台Bの質量はAの質量に比べて十分大きいため、Bの速度W(t)は衝突の影響を受けないものとする。Aは跳ね上がった後、また下降して衝突をし、それを繰り返す。AとBの運動を、横軸を時間t、縦軸を高さyにとってグラフに示すと**図1－2**のようになる。ここでは、hとHは縮尺どおりには描かれていない。重力加速度をgとし、速度は鉛直上向きを正として以下の設問に答えよ。

I　台が最も低い位置にあった時刻 t = 0 に支えがはずされ、小球は落下して台に衝突した。

その時刻 t_1 は $\frac{1}{3}T$ であった。

(1)　小球Aの衝突直前の速度 u_1 および初めの高さhを、a, g, T を使って表せ。

(2)　衝突直後のAの速度 v_1 を u_1 と W_1 を使って表せ。ただし $W_1 = W(t_1)$。

II　小球は前述の衝突によって跳ね上がった後、時刻Tに最高の高さHに達した。

(1)　このように運動するためには、v_1 およびbはそれぞれgTの何倍でなければならないか。

(2)　そのときの高さHを、a, g, T を使って表せ。

(3)　変数sを s = t - T によって定義したとき、跳ね上がってから次に台と衝突するまでの間、小球と台との間の距離dをsの関数として表せ。ただし、H, a を使ってもよい。

(4)　前問で求めた距離を d(s)と書く。d (-s) = d (s)が成り立つことを使って、次に衝突する時刻 t_2 を求めよ。

(5)　2回めの衝突直後のAの速度 v_2 を gT を使って表せ。

(6)　**図1－2**にならって、小球Aの位置y(t)を時刻tが0から3Tの間についてグラフに示せ。図には y (t) の極大、極小におけるtとyの座標を明示せよ。

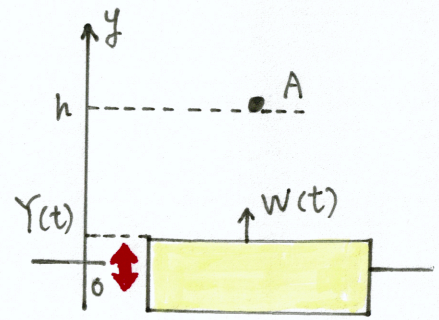


図1－1

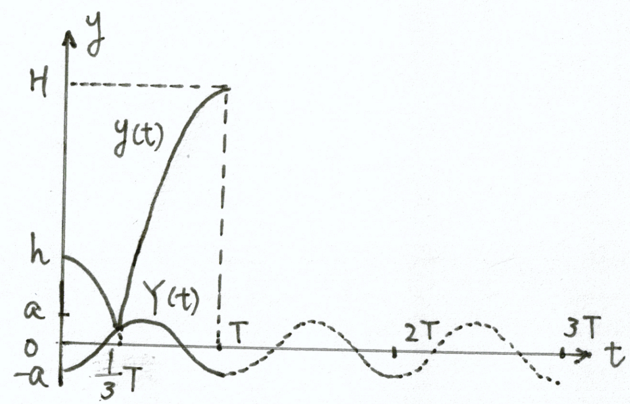


図1－2

1992 東大 第1問

この問題を通じて、小球の速さを $v(t)$，位置を $y(t)$ とする。

I (1) $v(t) = -gt \qquad (0 \leqq t \leqq \frac{1}{3}T)$

$$\therefore u_1 = v(\tfrac{1}{3}T) = -\frac{1}{3}gT \quad \cdots ①$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h \qquad (0 \leqq t \leqq \tfrac{1}{3}T)$$

題意より $y(\frac{T}{3}) = Y(\frac{T}{3})$ だから．

$$-\frac{1}{2}g\left(\frac{T}{3}\right)^2 + h = -a\underbrace{\cos\frac{2\pi}{\cancel{T}}\cdot\frac{\cancel{T}}{3}}_{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore h = \frac{a}{2} + \frac{1}{18}gT^2$$

(2) はねかえり係数の定義より

$$1 = -\frac{v_1 - W_1}{u_1 - W_1} \qquad \therefore u_1 - W_1 = -v_1 + W_1$$

$$v_1 = -u_1 + 2W_1 \quad \cdots ②$$

Bの速度はAの影響を受けないため，
運動量保存則は使えないヨ!!

II (1) $y(t) = -\frac{1}{2}g\left(t - \frac{T}{3}\right)^2 + v_1\left(t - \frac{T}{3}\right) + \left(-a\cos\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{3}\right)$

$$\left(\frac{1}{3}T \leqq t \leqq \frac{5}{3}T\right)$$

放物運動の対称性と，(4)で
三角関数の周期性からわかる。

$$v(t) = v_1 - g\left(t - \frac{T}{3}\right) \qquad \left(\frac{1}{3}T \leqq t \leqq \frac{5}{3}T\right)$$

$v(T) = 0$ だから

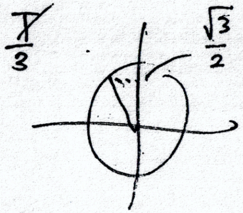
$$0 = v_1 - g\left(T - \frac{T}{3}\right)$$

$$= v_1 - g\cdot\frac{2}{3}T \qquad \therefore v_1 = \frac{2}{3}gT$$

$\frac{2}{3}$倍

②に①と，v_1，W_1の具体的な値を代入して，bを求める。

$$\frac{2}{3}gT = -\left(-\frac{1}{3}gT\right) + 2\cdot b\sin\frac{2\pi}{\cancel{T}}\cdot\frac{\cancel{T}}{3}$$



$$\frac{2}{3}gT = \frac{1}{3}gT + \cancel{2}b\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}$$

$$b = \frac{\frac{1}{3}gT}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}gT$$

$\therefore \frac{1}{3\sqrt{3}}$倍

Ⅱ(2) $H = y(T) = -\frac{1}{2}g\left(T-\frac{T}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}gT\left(T-\frac{T}{3}\right) + \frac{a}{2}$

$\left(\because \cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}\right)$

$= -\frac{1}{2}g\cdot\left(\frac{2}{3}T\right)^2 + \frac{2}{3}gT\cdot\frac{2}{3}T + \frac{a}{2}$

$= -\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{18}_{9}}gT^2 + \frac{4}{9}gT^2 + \frac{a}{2} = \frac{2}{9}gT^2 + \frac{a}{2}$ //

(3) 新しい時間変数sを $s = t - T$ で導入したということは、

$t = T$ のとき原点になるように時間座標をずらしたという意味。

$y(s)$ は $s = 0$ で $y = H$, $v = 0$ の自由落下であるから

$y(s) = -\frac{1}{2}gs^2 + H$

また、

$Y(s) = -a\cos\frac{2\pi}{T}(s+T) = -a\cos\frac{2\pi}{T}s$

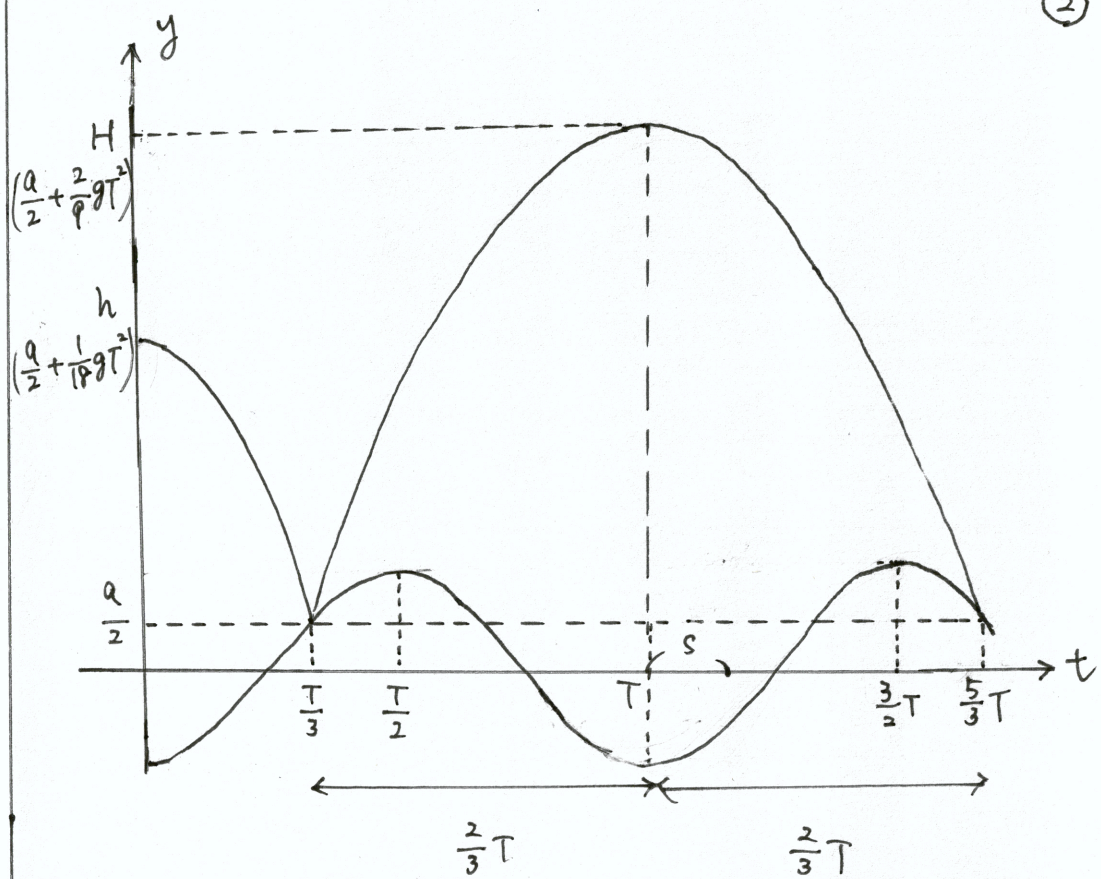
以上より

$d(s) = y(s) - Y(s) = \left(-\frac{1}{2}gs^2 + H\right) - \left(-a\cos\frac{2\pi}{T}s\right)$

$= -\frac{1}{2}gs^2 + H + a\cos\frac{2\pi}{T}s$ //

sに関して偶関数

②



	0		$\frac{T}{3}$ 直前	$\frac{T}{3}$ 直後		T		$\frac{5}{3}T$ 直前	$\frac{5}{3}T$ 直後
$v(t)$	0		u_1	v_1		0			
$W(t)$	0		W_1	W_1		0			

ここまでの経過をグラフと表にすると、このようになる。

(4) ①ページ右側のふき出しの中に書いてしまったが、グラフを書けば対称性よりわかる。

$$t_2 = \frac{5}{3}T$$

(5) 1回目の衝突と同様に計算する。2回目の衝突直前の小球の速さを u_2，台の速さを W_2 とすると，はねかえり係数の定義より

$$1 = -\frac{v_2 - W_2}{u_2 - W_2} \quad \cdots ③$$

また，

$$v(t) = -g(t - T) \qquad \left(T \leqq t \leqq \frac{5}{3}T\right)$$

であるから

$$u_2 = v\left(\frac{5}{3}T\right) = -g\left(\frac{5}{3}T - T\right) = -\frac{2}{3}gT \quad \cdots ④$$

また

$$W_2 = W\left(\frac{5}{3}T\right) = b\sin\frac{2\pi}{\cancel{T}}\cdot\frac{5}{3}\cancel{T} = -\frac{\sqrt{3}}{2}b \quad \cdots ⑤$$

④，⑤を③に代入すると

$$-u_2 + W_2 = v_2 - W_2$$

$$v_2 = -u_2 + 2W_2$$

次ページへ

Ⅱ(5) つづき

$$v_2 = -\left(-\frac{2}{3}gT\right) + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)$$

Ⅱ(1)の結果の $b = \frac{1}{3\sqrt{3}}gT$ も使うと

$$v_2 = \frac{2}{3}gT - \sqrt{3}\cdot\frac{1}{3\sqrt{3}}gT = \frac{1}{3}gT$$

(6) (5)までやって、グラフの対称性に気づけば早い。気づかなかった場合、

3回目の衝突($t = t_3$とする)までの小球の運動は、

$$v(t) = -g\left(t - \frac{5}{3}T\right) + \frac{1}{3}gT \quad \left(\frac{5}{3}T \leqq t \leqq t_3\right)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}g\left(t - \frac{5}{3}T\right)^2 + \frac{1}{3}gT\left(t - \frac{5}{3}T\right)$$
$$+\left(-a\cos\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{5}{3}T\right) \quad \left(\frac{5}{3}T \leqq t \leqq t_3\right)$$

となることを用いて 小球の次の最高点($t = t_{max}$のときとする)を調べる。

$$v(t_{max}) = -g\left(t_{max} - \frac{5}{3}T\right) + \frac{1}{3}gT = 0$$

を解いて

$$t_{max} - \frac{5}{3}T = \frac{T}{3}$$

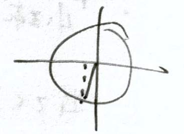
$$t_{max} = 2T$$

とわかる。

そのとき、

$$y(t_{max}) = -\frac{1}{2}g\left(2T - \frac{5}{3}T\right)^2 + \frac{1}{3}gT\left(2T - \frac{5}{3}T\right)$$

$$\underbrace{-a\cos\frac{10}{3}\pi}$$



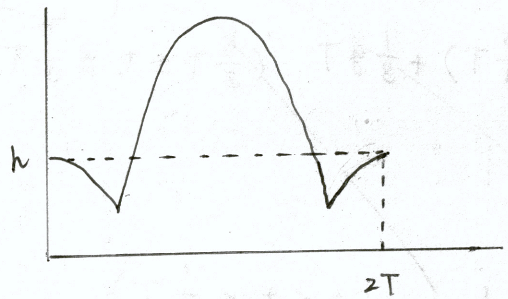
$$\cos\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}g\cdot\left(\frac{1}{3}T\right)^2 + \frac{1}{3}gT\cdot\frac{1}{3}T + \frac{a}{2}$$

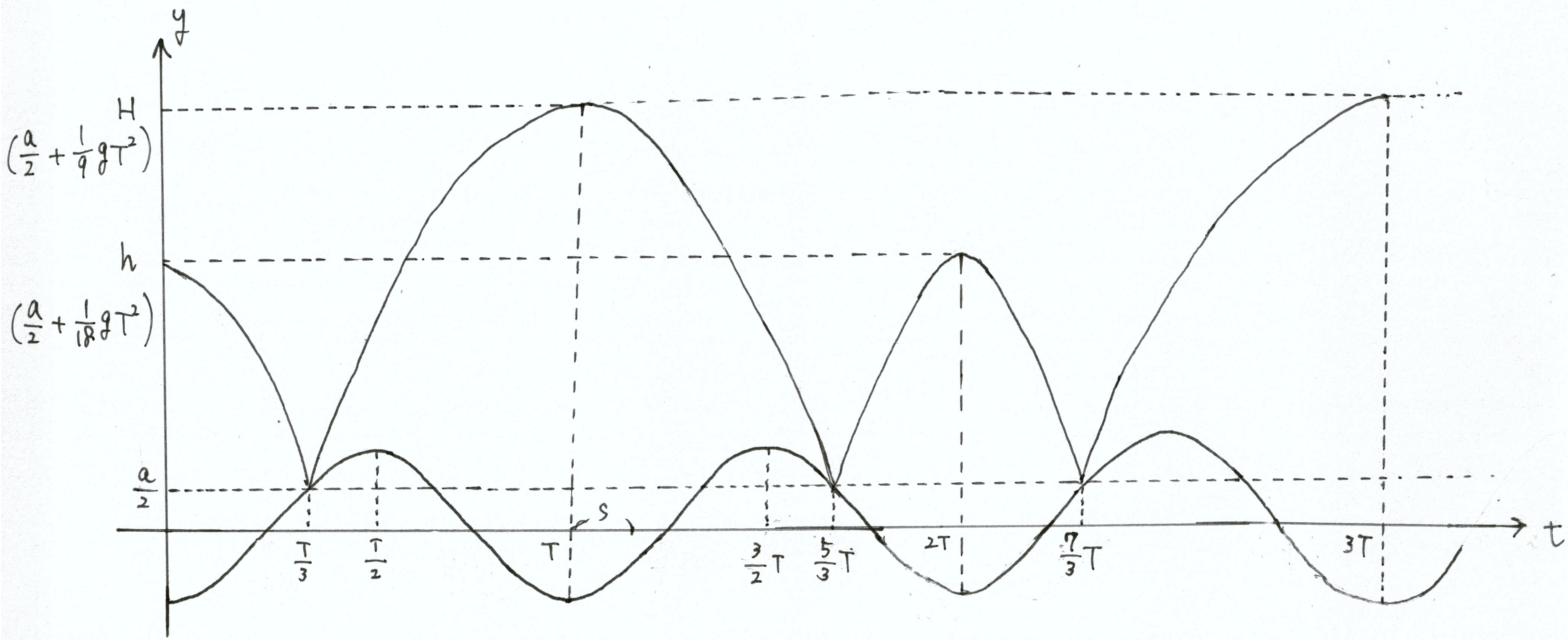
$$= -\frac{1}{18}gT^2 + \frac{1}{9}gT^2 + \frac{a}{2}$$

$$= \frac{1}{18}gT^2 + \frac{a}{2} = h \quad (\because \text{Ⅰ(1)の答え})$$

とわかる。これで



までグラフが書ける。ここまで来れば、対称性がよりハッキリしてくる。



	0	$\frac{T}{3}$ 直前	$\frac{T}{3}$ 直後	T	$\frac{5}{3}T$ 直前	$\frac{5}{3}T$ 直後
$v(t)$	0	u_1	v_1	0	u_2	v_2
$W(t)$	0	W_1	W_1	0	W_2	W_2

↑ 計算に使った表

$v(2T) = v(0)$, $y(2T) = y(0)$

$W(2T) = W(0)$, $Y(2T) = Y(0)$ であるから,

運動の状態は $t=2T$ で完全に元に戻る。

よって,グラフは上図のようになる。

以上