# 解析力学例題研究

あおば物理塾

2023 年 1 月 29 日

荷電粒子のラグランジュ関数

$$L = \frac{1}{2}m\boldsymbol{r}^2 - e\phi + e(\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{A})$$

からハミルトン関数を導きなさい。また、正準方程式 (運動方程式) を導きなさい。ここで $\phi$ は電磁場のスカラーポテンシャル（電位)、$\boldsymbol{A}$ はベクトルポテンシャルである。

**ポイント**

ルジャンドル変換を用いてハミルトン関数 $H$ は

$$H = \boldsymbol{p} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} - L \tag{1}$$

となる。ここで一般化運動量 $\boldsymbol{p}$ は

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \tag{2}$$

となる。$H$ を用いると正準方程式 (運動方程式) は

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{q}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} \\ \dot{\boldsymbol{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}} \end{cases}$$

と表される。

今回のラグランジュ関数 $L$ は以下の通りである。

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m\boldsymbol{r}^2 - e\phi + e(\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{A}) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - e\phi + e(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z) \end{aligned} \tag{3}$$

$L$ から一般化運動量 $\boldsymbol{p}$ を求めてみる。(2) より

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + eA_x \\ p_y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + eA_y \\ p_z &= \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} + eA_z \end{aligned} \tag{4}$$

これらをまとめてベクトル表記すると

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} = m\dot{\boldsymbol{r}} + e\boldsymbol{A} \tag{5}$$

となる。よって、(1) よりハミルトン関数 $H$ は

$$
\begin{aligned}
H &= \sum \boldsymbol{p} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} - L \\
&= \sum_{j=1}^{3} p_j \cdot \dot{q_j} - L \\
&= (m\dot{x} + eA_x)\dot{x} + (m\dot{y} + eA_y)\dot{y} + (m\dot{z} + eA_z)\dot{z} - \left\{ \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - e\phi + e(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z) \right\} \\
&= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - e\phi + e(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z) + e\phi \\
&= \frac{1}{2}m\left[ \frac{1}{m}\{p_x - eA_x\}^2 + \frac{1}{m}\{p_y - eA_y\}^2 + \frac{1}{m}\{p_y - eA_y\}^2 \right] + e\phi \\
&= \frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{3}(p_j - eA_j)^2 + e\phi \\
&= \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})^2 + e\phi
\end{aligned}
\tag{6}
$$

となる。次に運動方程式を求めてみる。(1) の 1 本目は

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} \\
&= \frac{\partial}{\partial p_x}\left\{ \frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{3}(p_j - eA_j)^2 + e\phi \right\} \\
&= \frac{1}{m}(p_x - eA_x)
\end{aligned}
$$

となるが、これは (4) 式に一致し、新しいものは出て来ない ($p_y$,$p_z$ も同じ)。2 本目は

$$
\begin{aligned}
\dot{p_x} &= -\frac{\partial H}{\partial x} \\
&= -\frac{\partial}{\partial x}\left\{ \frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{3}(p_j - eA_j)^2 + e\phi \right\} \\
&= -\left[ \frac{1}{m}\left\{ (p_x - eA_x)(-e\frac{\partial A_x}{\partial x}) + (p_y - eA_y)(-e\frac{\partial A_y}{\partial x}) + (p_z - eA_z)(-e\frac{\partial A_z}{\partial x}) \right\} \right] - e\frac{\partial \phi}{\partial x} \\
&= \frac{e}{m}\left\{ (p_x - eA_x)\frac{\partial A_x}{\partial x} + (p_y - eA_y)\frac{\partial A_y}{\partial x} + (p_z - eA_z)\frac{\partial A_z}{\partial x} \right\} - e\frac{\partial \phi}{\partial x}
\end{aligned}
$$

となる。これらの $p_x$ に (4) 式を代入し整理する。

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} + e\dot{A_x} &= \frac{e}{m}\left\{ (m\dot{x} + eA_x - eA_x)\frac{\partial A_x}{\partial x} + (m\dot{y} + eA_y - eA_y)\frac{\partial A_y}{\partial x} + (m\dot{z} + eA_z - eA_z)\frac{\partial A_z}{\partial x} \right\} - e\frac{\partial \phi}{\partial x} \\
&= e\left( \dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x} \right)
\end{aligned}
$$

ここで偏微分の公式

$$
\dot{A_x} = \frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial A_x}{\partial t}
$$

を用いると

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} + e\left\{\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial A_x}{\partial t}\right\} &= e\left\{\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right\} \\
m\ddot{x} &= e\left\{\dot{y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \dot{z}(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x})\right\} - e\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) \\
&= e\left\{\dot{y}(\nabla \times \boldsymbol{A})_z - \dot{z}(\nabla \times \boldsymbol{A})_y\right\} - e\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) \\
&= e\left\{\dot{\boldsymbol{r}} \times (\nabla \times \boldsymbol{A})\right\}_x - e\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial t}\right)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

を得る。$y, z$ も同様に

$$
\begin{aligned}
m\ddot{y} &= e\left\{\dot{\boldsymbol{r}} \times (\nabla \times \boldsymbol{A})\right\}_y - e\left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) \\
m\ddot{z} &= e\left\{\dot{\boldsymbol{r}} \times (\nabla \times \boldsymbol{A})\right\}_z - e\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial t}\right)
\end{aligned}
$$

であるからまとめてベクトル表記すると

$$
\begin{aligned}
m\ddot{\boldsymbol{r}} &= e\left\{\dot{\boldsymbol{r}} \times (\nabla \times \boldsymbol{A})\right\} - e\left(\nabla\phi + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) \\
&= e(\boldsymbol{E} + \dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B})
\end{aligned}
\tag{8}
$$

となり、最終的に荷電粒子の受けるローレンツ力の式を得る。

## 参考文献


[1] 久保謙一. 解析力学. 裳華房,2001, 裳華房フィジックスライブラリー

[2] 和達三樹. 物理のための数学. 岩波書店,2017, 物理入門コース新装版