京都府立医科大学　2015年第1問

地面に x 軸をとり、鉛直上向きを正の向きとして y 軸をとる。xy 平面の原点 O から、xy 平面内で、x 軸の正の向きより角 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ 上向きに、質量 m の小物体 P を速さ v_0 で投げ出す。重力加速度の大きさを g とし、重力による位置エネルギーの基準は地面とする。以下のそれぞれの場合について、すべての運動は xy 平面に限るとして、問いに答えよ。

問1　P は、x 座標が l の点 A を通過した。その後最高点 H に達したのち、地面に落下した。点 A での P の運動エネルギーと重力による位置エネルギーはいくらか。また、P の力学的エネルギーを求めよ。

問2　P は、最高点 H に達したとき、内部にある質量が無視できる火薬の爆発により、水平方向に質量 $\frac{1}{3}m$ と、$\frac{2}{3}m$ の2つの破片に分裂した。その後、分裂した2つの破片は地面に落下し、落下点の x 座標は質量 $\frac{1}{3}m$ の破片の方が大きかった。分裂した瞬間の2つの破片の速度変化は水平方向のみで、火薬の爆発のエネルギー E は、すべて2つの破片の運動エネルギーに変わるものとする。

(1) 火薬の爆発力が小さくて $E<m(v_0\cos\theta)^2$ を満たす場合、質量 $\frac{1}{3}m$ の破片の落下点の x 座標を求めよ。また、2つの落下点の間の距離はいくらか。

(2) 一方、火薬の爆発力を大きくすると、質量 $\frac{2}{3}m$ の破片は点 O に落下した。そのときの質量 $\frac{1}{3}m$ の破片の落下点の x 座標を v_0 、θ 、g で表わせ。

問3　P は、最高点 H に達したとき、同様の火薬の爆発によって、垂直方向に質量 $\frac{1}{3}m$ と $\frac{2}{3}m$ の2つの破片に分裂した。分裂した瞬間の2つの破片の速度変化は垂直方向のみで、火薬の爆発のエネルギー E は、すべて2つの破片の運動エネルギーに変わるものとする。上向きに分裂した質量 $\frac{1}{3}m$ の破片を Q 、下向きに分裂した質量 $\frac{2}{3}m$ の破片を R とする。破片 R が地面に達したとき、破片 Q は落下している状態であった。

(1) R が地面に達したときの Q の y 座標はいくらか。

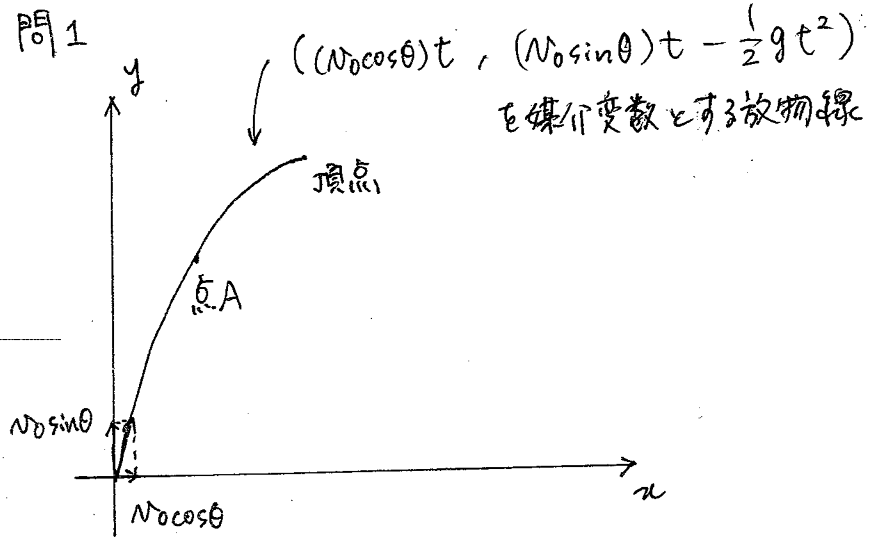
(2) 火薬の爆発のエネルギー E はある値より小さい。その値を求めよ。

(3) 火薬の爆発のエネルギー E が $E<\frac{1}{24}mv_0^2$ を満たす場合、θ が θ_1 のとき火薬が爆発した点 H の y 座標と、(1)の Q の y 座標が等しくなった。$\sin\theta_1$ を求めよ。

広島あおば物理塾
(082)274-9555

2015　京都府立医大　第1問

問1



$A(l,\ h)$とすると、時刻Tに通過するとして

$$(v_0\cos\theta)T=l \qquad \therefore\ T=\frac{l}{v_0\cos\theta}$$

$$\therefore\ h=(v_0\sin\theta)\cdot\frac{l}{v_0\cos\theta}-\frac{1}{2}g\left(\frac{l}{v_0\cos\theta}\right)^2$$

$$=l\tan\theta-\frac{1}{2}\frac{gl^2}{v_0^2\cos^2\theta}$$

位置エネルギーから先に求める。「$U=mgh$」より

$$U=mg\left(l\tan\theta-\frac{1}{2}\frac{gl^2}{v_0^2\cos^2\theta}\right)$$

$$=mgl\tan\theta-\frac{1}{2}\frac{mg^2l^2}{v_0^2\cos^2\theta}$$

次に力学的エネルギーεは　← Eの文字は本文で別に使われているのでεとした。

$$\varepsilon=\frac{1}{2}mv_0^2$$

よって運動エネルギーKは

$$K=\varepsilon-U=\frac{1}{2}mv_0^2-\left(mgl\tan\theta-\frac{1}{2}\frac{mg^2l^2}{v_0^2\cos^2\theta}\right)$$

$$=\frac{1}{2}mv_0^2-mgl\tan\theta+\frac{1}{2}\frac{mg^2l^2}{v_0^2\cos^2\theta}$$

問2　頂点$H(H_x,\ H_y)$とすると、時刻tにHに到達するとして

「$v=v_0+at$」より

$$0=v_0\sin\theta-gt \qquad \therefore\ t=\frac{v_0\sin\theta}{g}$$

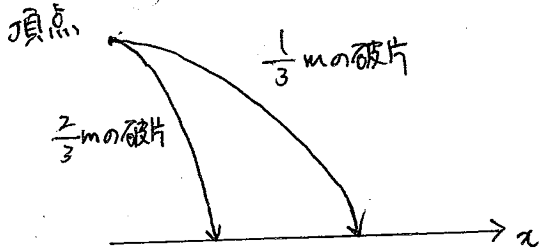
「$x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2$」より

∴ $H_x = v_0\cos\theta \cdot \dfrac{v_0\sin\theta}{g} = \dfrac{v_0^2\sin2\theta}{2g}$

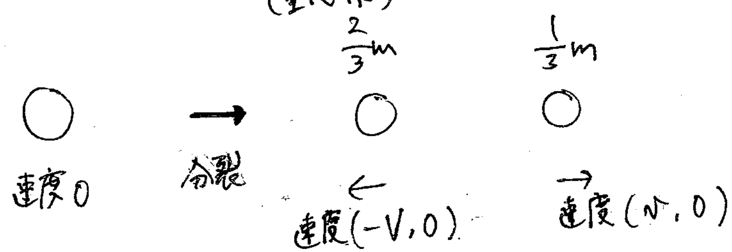
$H_y = (v_0\sin\theta)\cdot\dfrac{v_0\sin\theta}{g} - \dfrac{1}{2}g\cdot\dfrac{v_0^2\sin^2\theta}{g^2}$

$= \dfrac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}$

(1)



$v_0\cos\theta$で右向きに移動する座標系で分裂を観測すると。
(重心系)



運動量保存則より　$V : v = 1 : 2$

$V = \dfrac{1}{2}v$

エネルギー保存則に代入して

$\dfrac{1}{\cancel{2}}\cdot\dfrac{\cancel{2}}{3}m\cdot\left(\dfrac{1}{2}v\right)^2 + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}mv^2 = E$

$\dfrac{1}{12}mv^2 + \dfrac{1}{6}mv^2 = E$　　∴ $\dfrac{\cancel{3}}{\cancel{12}_{4}}mv^2 = E$

$v^2 = \dfrac{4E}{m}$

∴ $v = 2\sqrt{\dfrac{E}{m}}$, $V = \sqrt{\dfrac{E}{m}}$

外から見た座標系に戻って、$\frac{1}{3}m$の破片の落下点は

$x = \underbrace{\dfrac{v_0^2\sin2\theta}{2g}}_{\text{頂点から数えて}(H_y)} + \underbrace{\left(v_0\cos\theta + 2\sqrt{\dfrac{E}{m}}\right)\cdot t}_{\text{これだけ右}}$

y軸方向の運動の対称性より、さっき求めた $t = \dfrac{v_0\sin\theta}{g}$

$= \dfrac{v_0^2\sin2\theta}{2g} + \dfrac{v_0^2\sin2\theta}{2g} + 2\sqrt{\dfrac{E}{m}}\cdot\dfrac{v_0\sin\theta}{g}$

$= \dfrac{v_0^2\sin2\theta}{g} + 2\sqrt{\dfrac{E}{m}}\cdot\dfrac{v_0\sin\theta}{g}$

落下点間の相対きょりは、再び $v_0\cos\theta$ で移動する座標系に戻って

$$\left|\{v-(\underset{\frac{1}{2}v}{\underset{\parallel}{-V}})\}\cdot t\right| = \frac{3}{2}v\cdot\frac{v_0\sin\theta}{g}$$

$$= \frac{3}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\sqrt{\frac{E}{m}}\cdot\frac{v_0\sin\theta}{g}$$

$$= \frac{3v_0\sin\theta}{g}\sqrt{\frac{E}{m}}$$

(2) $\underbrace{\left(\frac{1}{3}m\text{の破片の落下点}\right)}_{☆} - \left(\text{落下点間の相対きょり}\right) = \underset{\text{原点に戻る}}{0}$

という題意。で、☆を v_0, θ, g で表す。

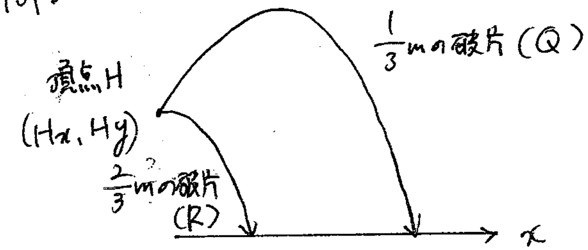
$$\underbrace{\frac{v_0^2\sin2\theta}{g} + 2\sqrt{\frac{E}{m}}\cdot\frac{v_0\sin\theta}{g}}_{☆} - \frac{3v_0\sin\theta}{g}\sqrt{\frac{E}{m}} = 0$$

$$\therefore \frac{v_0^2\sin2\theta}{g} = \frac{v_0\sin\theta}{g}\sqrt{\frac{E}{m}}$$

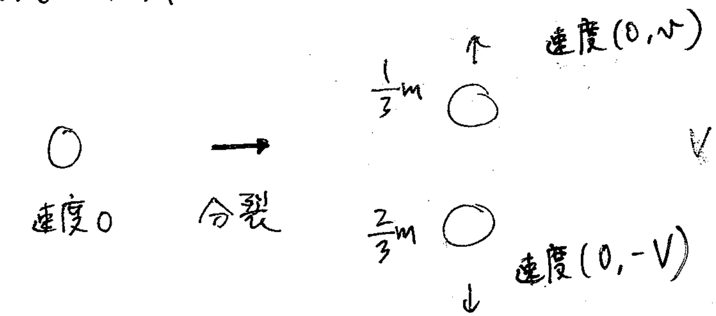
これを使って

$$☆ = \frac{v_0^2\sin2\theta}{g} + 2\frac{v_0^2\sin2\theta}{g} = \frac{3v_0^2\sin2\theta}{g}$$

問3



$v_0\cos\theta$で右向きに移動する座標系で分裂を観測すると、



$V : v = 1 : 2$

$V = \frac{1}{2}v$

問2(1)と運・保、エ・保は全く同じなので

$$v = 2\sqrt{\frac{E}{m}}$$

$$\therefore V = \sqrt{\frac{E}{m}}$$

相対速度 $v-(-V) = 3\sqrt{\frac{E}{m}}$

よって $\frac{2}{3}$の破片がHから地面に到達するまでの時間をt_1とすると

「$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$」より

$$\frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g} - \sqrt{\frac{E}{m}}\,t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = 0$$

$$t_1 = \frac{\sqrt{\frac{E}{m}} \pm \sqrt{\frac{E}{m} + 4\cdot\frac{1}{2}g\cdot\frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}}}{2\left(-\frac{1}{2}g\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{E}{m}} - \sqrt{\frac{E}{m} + v_0^2\sin^2\theta}}{-g}$$

（±はこれで $t_1>0$ になる）

$$= \frac{\sqrt{\frac{E}{m} + v_0^2\sin^2\theta} - \sqrt{\frac{E}{m}}}{g}$$

よって $y_Q = \left(\frac{1}{3}m\text{の破片の位置}\right) + \left(\frac{1}{3}m\text{と}\frac{2}{3}m\text{の破片の相対きょり}\right)$

$$= 0 + \underbrace{3\sqrt{\frac{E}{m}}}_{\text{相対速度}}\, t_1$$

$$= 3\sqrt{\frac{E}{m}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{E}{m} + v_0^2\sin^2\theta} - \sqrt{\frac{E}{m}}}{g}$$

$$= \frac{3E}{mg}\left(\sqrt{1 + \frac{m v_0^2\sin^2\theta}{E}} - 1\right)$$

(2) 「Rが地面に達したとき、Qは落下状態だった」つまりQは時刻 t_1 のとき、「第2の最高点（t_2とする）より後で地面に着く（tは題意より調べなくてもよい）前の状態」。ちなみに t_2 は

$$v - g t_2 = 0$$

$$t_2 = \frac{v}{g}\left(= \frac{2}{g}\sqrt{\frac{E}{m}}\right)$$

であるから $t_1 > t_2$ がそれ.

$$\therefore \frac{\sqrt{\frac{E}{m} + v_0^2\sin^2\theta} - \sqrt{\frac{E}{m}}}{g} > \frac{2}{g}\sqrt{\frac{E}{m}}$$

$$\sqrt{\frac{E}{m} + v_0^2\sin^2\theta} > 3\sqrt{\frac{E}{m}}$$

$$\frac{E}{m} + v_0^2\sin^2\theta > 9\frac{E}{m}$$

$$-8\frac{E}{m} > -v_0^2\sin^2\theta$$

$$E < \frac{m v_0^2}{8}\sin^2\theta$$

(3) 題意より

$$\frac{3E}{\cancel{m}\cancel{g}}\left(\sqrt{1+\frac{mv_0^2\sin^2\theta_1}{E}}-1\right)=\frac{v_0^2\sin^2\theta_1}{2\cancel{g}}$$

$$\sqrt{1+\frac{mv_0^2\sin^2\theta_1}{E}}-1=\frac{v_0^2\sin^2\theta_1}{6E}$$

ここから $\frac{mv_0^2\sin\theta_1}{E}=x$ とおいて $\sin\theta_1$ を出す。

$$\sqrt{1+x}-1=\frac{1}{6}x$$

$$\sqrt{1+x}=\frac{1}{6}x+1$$

$$\cancel{1}+x=\frac{1}{36}x^2+\frac{1}{3}x+\cancel{1}$$

$$1=\frac{1}{36}x+\frac{1}{3}\quad (x\neq 0より)$$

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{36}\frac{mv_0^2\sin^2\theta_1}{E}$$

$$\sin^2\theta_1=\frac{2\cdot\cancel{36}^{12}E}{\cancel{3}mv_0^2}$$

$$\therefore \sin\theta_1=\frac{2}{v_0}\sqrt{\frac{6E}{m}}$$

別解研究

1 問1 A点のPの速度(v_x, v_y)を

$$v_x = v_0\cos\theta$$

$$v_y = v_0\sin\theta - gt$$

とし，$t = \dfrac{l}{v_0\cos\theta}$ から 運動エネルギーKを先に

$$K = \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}m\left\{v_0^2\cos^2\theta + \left(v_0\sin\theta - g\cdot\frac{l}{v_0\cos\theta}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{2}m\left(v_0^2\cos^2\theta + v_0^2\sin^2\theta - 2gl\tan\theta + g^2\frac{l^2}{v_0^2\cos^2\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{2}m\left(v_0^2 - 2gl\tan\theta + \frac{l^2}{v_0^2\cos^2\theta}\right)$$

と出しても手間はほとんど変わらない。

問2 最高点のy座標H_yを出すとき、エネルギー保存則

$$\underbrace{mgH_y}_{\text{0→Hで得る位置エネルギー}} = \underbrace{\frac{1}{2}m\left(v_0\sin\theta\right)^2}_{\text{0→Hで失う運動エネルギー}}$$

だいぶ略記してるけど…

で $H_y = \dfrac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}$ と出してもよい。

また、0→Hに要する時間tは，このHyと「$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$」から出すことも出来，そこから「$x = vt$」より$H_x$を出してもよい(下記)。

$$\underbrace{\frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}}_{H_y} = \left(v_0\sin\theta\right)t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\therefore g^2t^2 - \left(2gv_0\sin\theta\right)t + v_0^2\sin^2\theta = 0$$

$$\therefore t = \frac{gv_0\sin\theta \pm \sqrt{g^2v_0^2\sin^2\theta - g^2v_0^2\sin^2\theta}}{g}$$

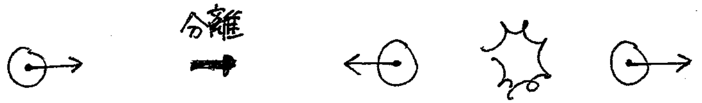
$$= \frac{v_0\sin\theta}{g}$$

手間は本解の1.5倍くらい!?

$$\therefore H_x = \left(v_0\cos\theta\right)\times\frac{v_0\sin\theta}{g} = \frac{v_0^2\sin2\theta}{2g}$$

問2つづき (1) 研究のため、重心系を使わない選択をしてみる。

∴ 外から見た座標系で考える。



速度($v_0\cos\theta$, 0)　　速度(V', 0)　　速度(v', 0)

運動量保存則より

$$m(v_0\cos\theta) = \frac{2}{3}mV' + \frac{1}{3}mv' \quad \cdots ①$$

エネルギー保存則より

$$E + \frac{1}{2}m(v_0\cos\theta)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}m\right)V'^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m\right)v'^2 \quad \cdots ②$$

①,②より v' を出す。①より

$$V' = \frac{3}{2}\left(v_0\cos\theta - \frac{1}{3}v'\right)$$

②に代入

$$E + \frac{1}{2}m(v_0\cos\theta)^2$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}m\right)\cdot\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{4}\left\{v_0^2\cos^2\theta - \frac{2}{3}(v_0\cos\theta)\cdot v' + \frac{1}{9}v'^2\right\}$$

$$+ \frac{1}{6}mv'^2$$

$$\frac{E}{m} + \frac{1}{2}(v_0\cos\theta)^2 = \frac{3}{4}v_0^2\cos^2\theta - \frac{1}{2}(v_0\cos\theta)v'$$

$$+ \frac{1}{12}v'^2 + \frac{1}{6}v'^2$$

$$\frac{4E}{m} + 2v_0^2\cos^2\theta = 3v_0^2\cos^2\theta - 2(v_0\cos\theta)v' + v'^2$$

$$\therefore\ v'^2 - 2(v_0\cos\theta)v' + v_0^2\cos^2\theta - \frac{4E}{m} = 0$$

$$v' = v_0\cos\theta \pm \sqrt{\cancel{v_0^2\cos^2\theta} - \left(\cancel{v_0^2\cos^2\theta} - \frac{4E}{m}\right)}$$

$$= v_0\cos\theta \pm \frac{4E}{m}$$

題意より $v' = v_0\cos\theta + \dfrac{4E}{m}$　以下 V' を出して合流。

と、全く計算出来ないわけではない。

$\boxed{\text{ちょっと長い…}}$

(2) $\frac{1}{3}m$の破片及び$\frac{2}{3}m$の破片のx座標をそれぞれx_1，x_2とすると

$$x_1 = H_x + (v_0\cos\theta + v)t \quad \cdots ③$$

$$x_2 = H_x + (v_0\cos\theta - V)t \quad \cdots ④$$

という運動をする。$x_2 = 0$のときのx_1の座標を答えればよい。$x_2 = 0$，

$V = \frac{1}{2}v$，$H_x = \frac{v_0^2\sin 2\theta}{2g}$，$t = \frac{v_0\sin\theta}{g}$ を④に代入すると

$$0 = \frac{v_0^2\sin 2\theta}{2g} + \left(v_0\cos\theta - \frac{1}{2}v\right)\cdot\frac{v_0\sin\theta}{g}$$

両辺×2g

$$0 = v_0^{\cancel{2}}\sin 2\theta + 2v_0^{\cancel{2}}\cos\theta\sin\theta - v\cdot\cancel{v_0}\sin\theta$$

$$= 2v_0\sin 2\theta - v\sin\theta$$

$$\therefore v = \frac{2v_0\sin 2\theta}{\sin\theta}$$

これを③に代入して

$$x_1 = \frac{v_0^2\sin 2\theta}{2g} + \left(v_0\cos\theta + \frac{2v_0\sin 2\theta}{\sin\theta}\right)\cdot\frac{v_0\sin\theta}{g}$$

$$= \quad〃 \quad + \frac{v_0^2\sin 2\theta}{2g} + \frac{(2v_0\sin 2\theta)\cdot v_0\cancel{\sin\theta}}{g\cancel{\sin\theta}}$$

$$= \frac{3v_0^2\sin 2\theta}{g}$$

と出しても，本解の2倍くらいの手間で何とか。

問3 (1)
$$y_Q = H_y + vt_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 \quad \cdots ⑤$$

$$y_R = H_y + Vt_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 \quad \cdots ⑥$$

⑥の左辺＝0とした式を解いてt_1を求め，それを⑤に代入してy_Qを求めることも可。この時，数学の"次数下げ"を使うと，計算が多少楽になる。具体的には⑥より

$$0 = H_y + Vt_1 - \frac{1}{2}gt_1^2$$

$$\therefore \quad -\frac{1}{2}gt_1^2 + Vt_1 + H_y = 0$$

$$-\frac{1}{2}gt_1^2 - \sqrt{\frac{E}{m}}\,t_1 + \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g} = 0$$

$$t_1 = \frac{\sqrt{\frac{E}{m}} \pm \sqrt{\frac{E}{m} - 4\left(-\frac{1}{2}g\right)\cdot\frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}}}{\cancel{2}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{2}}g\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{E}{m} + v_0^2\sin^2\theta} - \sqrt{\frac{E}{m}}}{g} \qquad (\because t_1 > 0)$$

このt_1を、⑤に次数下げしてから代入する。⑤より

$$y_Q = H_y + vt_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 \quad \downarrow \text{細工}$$

$$= \underbrace{H_y + Vt_1 - \frac{1}{2}gt_1^2}_{⑥\text{より}0} - Vt_1 + vt_1$$

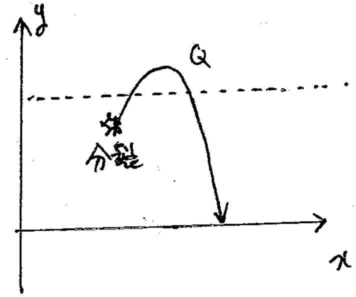
$$= (v - V)t_1$$

$$= \left(2\sqrt{\frac{E}{m}} + \sqrt{\frac{E}{m}}\right)\cdot\frac{\sqrt{\frac{E}{m} + v_0^2\sin^2\theta} - \sqrt{\frac{E}{m}}}{g}$$

$$= \frac{3E}{mg}\left(\sqrt{1 + \frac{mv_0^2\sin^2\theta}{E}} - 1\right)$$

//

(2) yの世界で考えてみると、1つのx(もしくはt)に対して2つのyを取り得る部分が出てきて非常にやりにくい



→ tの世界で考える

(3) 火薬が爆発した点のy座標H_yと、

Rが着地したときのQのy座標y_Qをイコールで結べばよい。

$$\frac{v_0^2\sin^2\theta_1}{2g} = \frac{3E}{mg}\left(\sqrt{1 + \frac{mv_0^2\sin^2\theta_1}{E}} - 1\right)$$

これをθ_1について解く。

以上

//