## 京大　2005年第2問

次の文を読んで、［　　］に適した式をそれぞれの解答欄に記入せよ。また、文中に挿入された問1については解答欄にグラフを描け。

図1のように、水平に間隔 $l$ で平行に置かれた2本のじゅうぶんに長いレールの上に質量 $m$ の導体棒が乗っている。レールは導体でできており、その太さは $l$ に比べてじゅうぶん小さいとする。2本のレールにはそれぞれ端子 1a、1b が取り付けられている。導体棒は常にレールと直交し、レールと平行な方向にのみ滑らかに動くことができ、摩擦は無視できるものとする。導体棒の速度 $v$ は右向きを正とする。2本のレール間には、常に鉛直上向きに一様な磁束密度 $B$ の磁界がかけられているとし、レールや導体棒を流れる電流によって生じる磁界は無視できるものとする。導体棒上に示した矢印は、導体棒を流れる電流の正の向きを表す。以下では抵抗と明示したもの以外の電気抵抗は無視できるものとする。

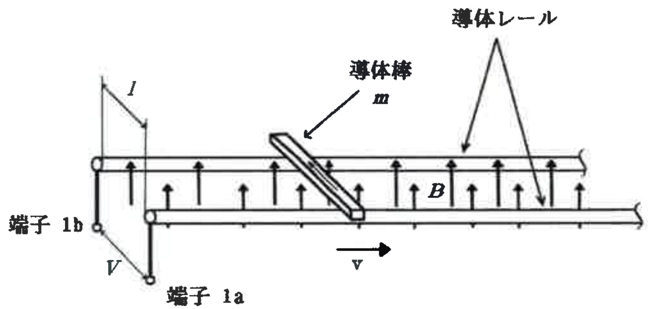



図 1

(1)　この系を、端子 1a、1b をもつ回路素子と見たときのはたらきについて調べよう。まず、この回路素子に電流が流れる様子を微視的な視点から考察する。レール上に置かれた導体棒中を電荷 $q$ を持った1つの荷電粒子が一定の速度 $u$ で手前から奥に向かって移動する状況を仮想的に考える。ただし、導体棒の速度 $v$ は $u$ に比べて無視できるものとする。このとき電荷は磁場からレールと平行向きに［　イ　］の力を受ける。電荷が手前側のレールとの接点から出発してもう一方のレールとの接点に到達する間に、導体棒がこの荷電粒子を通じて受ける力積は［　ロ　］である。この答えからわかるように、導体棒が受ける力積は電荷の移動速度によらない。したがって、他の外力がはたらかない状況で、静止している導体棒が速度 $v$ まで加速されたならば、その間に導体棒を流れた電荷の総量は、$Q=$［　ハ　］$\times v$ であたえられる。また、このとき導体棒が磁界中を運動していることによって生じる起電力、すなわち、端子 1a に対する端子 1b の電圧 $V$ は $v$ をもちいない表式で

$$V=\frac{Q}{\boxed{\text{ニ}}}$$

とあたえられる。

(2)　次に、図2に示した電気容量 $C$ のコンデンサー、電気抵抗 $R$ の抵抗、起電力が $E$ の直流電源と2つのスイッチ a, b からなる回路の端子 2a, 2b を、図1の端子 1a, 1b にそれぞれつないだ。各スイッチは最初、左側に倒されており、導体棒は静止していた。この状態から、時刻 $t=0$ においてスイッチ a を右にたおし、直流電源側につないだところ、導体棒の速度 $v$ は図3に示すように、次第に増加し、一定値 $v_1=$［　ホ　］に近づいた。ここで図3中の $T_0$ は $v$ が0から $v_1/2$ になるのに要した時間である。導体棒の速度が $v$ のとき、導体棒を流れる電流は、$v$ を用いて［　ヘ　］と表される。

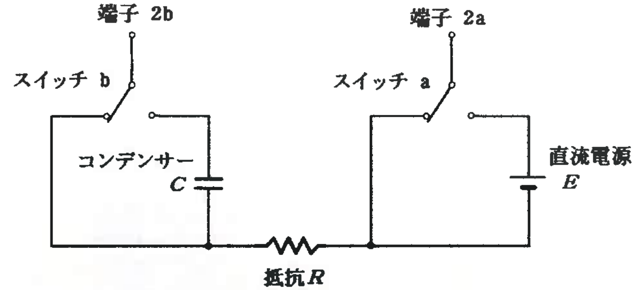



図 2

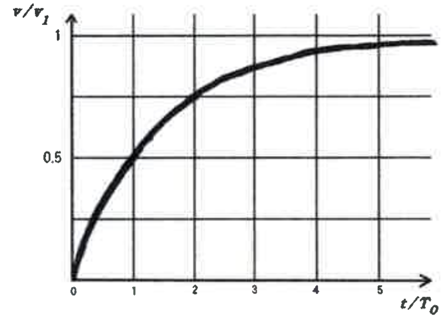
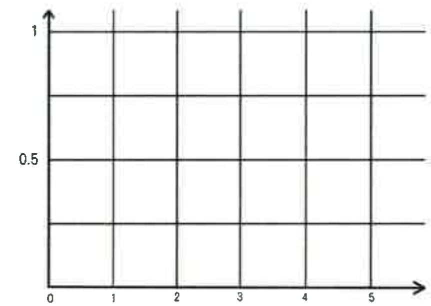



図 3

**問 1**　解答欄に、このときの、直流電源の仕事率、抵抗における消費電力、および導体棒にはたらく力の仕事率の時間変化のグラフを、それぞれ実線(＿＿＿)、破線(－－－)、点線(………)で描け。なお、横軸の目盛りは図3と同じものを用い、縦軸の目盛りはスイッチ a を右にたおした直後の直流電源の仕事率が1となるように選べ。また、記号や式など、3つの曲線以外のものは記入しないこと。



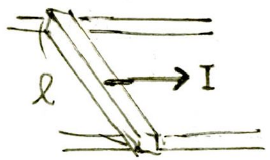

解答欄

(3)　今度は、スイッチ b を右側にたおして回路をコンデンサー側につないだ場合を考える。前と同様に、スイッチ a は左にたおしておき、導体棒は静止させておく。スイッチ a を右にたおすと導体棒は動き始め、じゅうぶん時間が経過した後に導体棒は等速運動をした。等速運動になった後にコンデンサーに蓄えられている電荷は　ト　、導体棒の速度は　チ　である。

京大 2005 第2問

(イ) $quB$

(ロ)




求める力積の大きさをIとすると

$$I = Ft = quB \cdot \boxed{\frac{l}{u}} = qlB$$

なお、力積はベクトル量で、向きは図の向き、大きさが$qlB$である。


(ハ) n個の電荷が棒の端から端まで動いたと近似する。

このnは後で消えることを期待して、試しに変数を1つ増やした。

運動量保存則より

$$\underbrace{mv}_{後} - \underbrace{0}_{前} = \underbrace{nI}_{力積} \left(= nqlB\right) \quad \therefore mv = nqlB$$

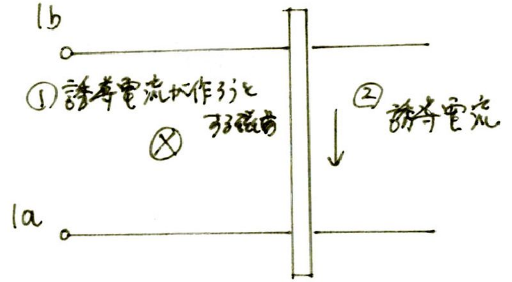
求める電荷Qは

$$Q = nq = \frac{mv}{Bl}$$

これはnによらない。厳密な言い方ではないが、端まで到達しなかった電荷や、途中で導体棒に入ってきた電荷があっても関係ない。

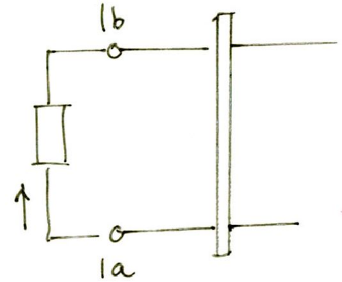
(ニ) $|V|$を求め、Vの符号を図で判断する。

$$|V| = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(BS)}{dt} = \frac{d(B\cdot lvt)}{dt} = Blv \quad \cdots ☆_1$$

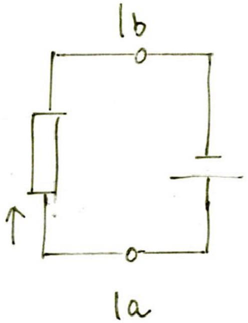



①→②の順で判断して誘導電流の向きがわかる。

1a, 1bに試しに抵抗を1つ接続すると、




このように電流が流れるから、導体棒は




の電池と等価である。従って、Vは負。 … $☆_2$

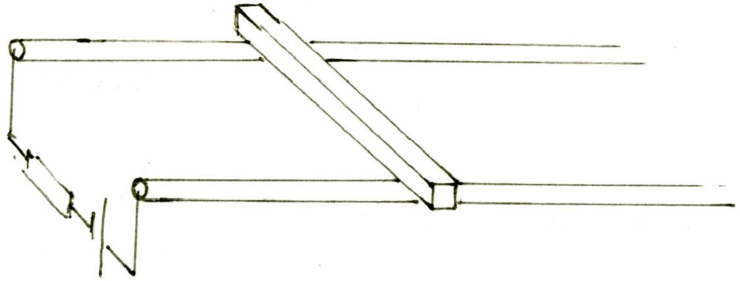
(ニ)が解けなくても(ホ)に進めるのでがんばって!

$$v = \frac{QBl}{m}$$

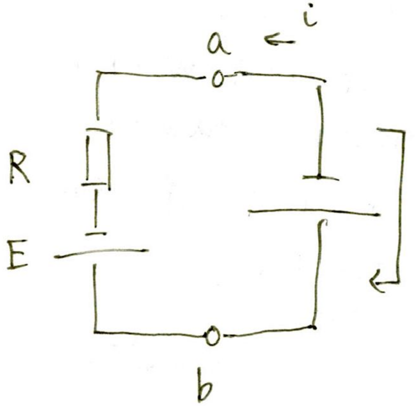
$$V = -Blv = -Bl\cdot\frac{QBl}{m} = \frac{Q}{-\frac{m}{B^2l^2}}$$

(ホ) スイッチの入れ方を見ると、典型問題に帰着する。

(例えば、うるし原先生の参考書 参照)



導体棒を電池で置き換え、$i=0$ とする。キルヒホッフの法則より




$$-E+\underset{0}{\underset{\sim}{i}}R+v_1Bl=0 \quad \cdots ※$$

$$\therefore v_1=\frac{E}{Bl}$$

(へ) (ホ)において、$v_1$ を一般の $v$、$i\neq 0$ と考え、キルヒホッフの法則 (※) を適用すると

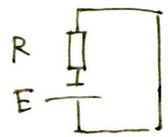
$$-E+iR+vBl=0$$

$$\therefore i=\frac{E-vBl}{R}$$

問1 「図3のグラフを元に、解答欄のグラフを作成せよ」という問題。

- 解答欄のグラフの縦軸

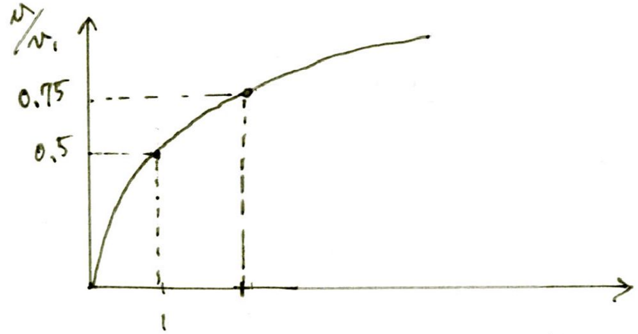
導体棒が動き始めた時の仕事率を1とする目盛。
$\shortparallel$
$v=0$

つまり


で電池がする仕事 (=抵抗の単位時間あたりの発熱) に等しく、$P_0=\dfrac{E^2}{R}$ が1目盛。

- 解答欄のグラフの横軸

横目盛りが $\dfrac{t}{T_0}$ で、本文の「$T_0$ は、$v$ が0から $\dfrac{v_1}{2}$ になるのに要した時間」とある。$T_0$ が実際何 s であるか気にする必要はない。図3より 横軸が1のとき $\dfrac{v}{v_1}=0.5$、2のとき $\dfrac{v}{v_1}=0.75$、… がわかれば十分である。



〈直流電源の仕事率（実線）〉

直流電源の仕事率 $P_E$ を $\frac{v}{v_1}$ で表現することを考える。

$$P_E = iE \quad \leftarrow \text{公式「}P=IV\text{」より}$$

$$= \frac{E - vBl}{R}E \quad \leftarrow \text{(ヘ)の結果より}$$

$$= \frac{E^2}{R}\left(1-\frac{Bl}{E}v\right)$$

$$= \underbrace{\frac{E^2}{R}}_{\text{縦軸1目盛}}\left(1-\frac{v}{v_1}\right) \quad \leftarrow \text{(ホ)の結果より} \quad \cdots\cdots \text{(A)}$$

$\frac{v}{v_1} = 0.5,\ 0.75\cdots$ を当てはめてグラフを書けばよい。

〈抵抗の消費電力（破線）〉

抵抗の消費電力 $P_R$ を $\frac{v}{v_1}$ で表現することを考える。

抵抗の両端電圧を使うと式が長くなるので、「$P=I^2R$」を用いて

$$P_R = i^2R = \left(\frac{E-vBl}{R}\right)^2 R \quad \leftarrow \text{(ヘ)の結果より}$$

$$= \frac{(E-vBl)^2}{R}$$

$$= \frac{E^2}{R}\left(1-\frac{Bl}{E}v\right)^2$$

$$= \underbrace{\frac{E^2}{R}}_{\text{縦軸1目盛}}\left(1-\frac{v}{v_1}\right)^2 \quad \leftarrow \text{(ホ)の結果より} \quad \cdots \text{(B)}$$

$\frac{v}{v_1} = 0.5,\ 0.75\cdots$ を当てはめてグラフを書く。

〈導体棒にはたらく力のする仕事率（点線）〉

導体棒の仕事率 $P_F$ を $\frac{v}{v_1}$ で表現することを考える。

> この式は公式「$W=Fx$」の両辺を $t$ で微分して「$P=Fv$」を得て、それに代入した。

$$P_F = \underbrace{iBl}_{\text{チカラ}}\cdot v$$

$$= \frac{E-vBl}{R}Bl\cdot v \quad \leftarrow \text{(ヘ)の結果より}$$

$$= \frac{E^2}{R}\left(1-\frac{Bl}{E}v\right)\cdot\frac{Bl}{E}v \quad \leftarrow \text{分母分子に}E\text{をかけた}$$

$$= \underbrace{\frac{E^2}{R}}_{\text{縦1目盛}}\left(1-\frac{v}{v_1}\right)\cdot\frac{v}{v_1} \quad \cdots \text{(C)}$$

$\frac{v}{v_1} = 0.5,\ 0.75\cdots$ を当てはめてグラフを書けばよい。

さて、(A),(B),(C)を用いて $\frac{v}{v_1}$ と各仕事率(電力)の関係が

わかったが、$\frac{t}{T_0}$ と $\frac{v}{v_1}$ の関係は本文図3で与えられているだけで、

何も具体的な量は書かれていない。

そこで、格子点だけをプロットし、適当な曲線を書いておけば

満点だと思われる。極値は合ったらなお良いけど…。

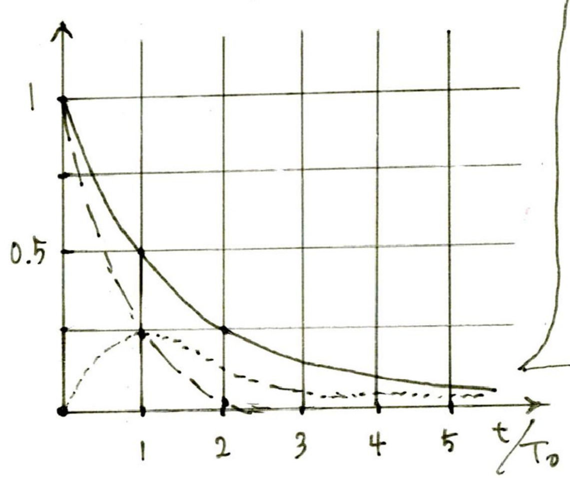



図3より

$$\lim_{t/T_0\to\infty}\frac{v}{v_1}=1$$ だから

〈実線〉

$$\lim_{v/v_1\to 1}\frac{E^2}{R}\left(1-\frac{v}{v_1}\right)=0$$

〈破線〉

$$\lim_{v/v_1\to 1}\frac{E^2}{R}\left(1-\frac{v}{v_1}\right)^2=0$$

〈点線〉

$$\lim_{v/v_1\to 1}\frac{E^2}{R}\left(1-\frac{v}{v_1}\right)\frac{v}{v_1}=0$$

つまり、全部

「$\frac{t}{T_0}$軸」に近づく

(チ)を先にやっちゃうけど…

(3) (チ) 定常状態でないので、十分時間が経つまでは

コンデンサに電流が流れる(交流ではコンデンサに電流が流れるのと同じ)。

定常状態になった後は、(リ)の結果よりコンデンサに

$$Q_2=\frac{mv_2}{Bl}\quad\cdots ①$$

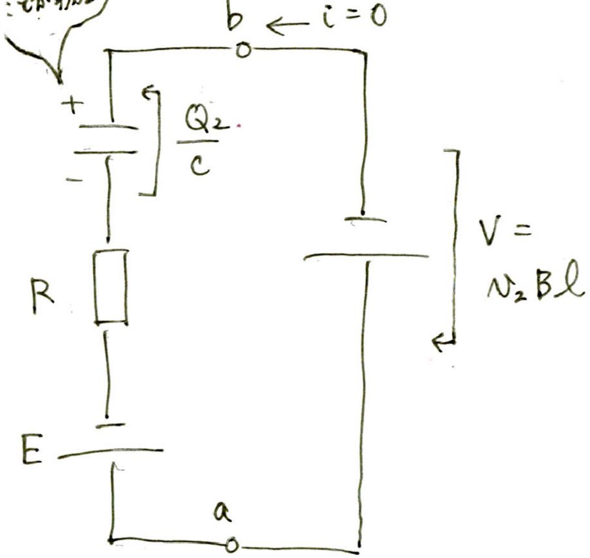
これは、運動量と力積の考え方に基づいて、出題者から誘導されて出したものでしたね。

の電荷が貯まっている。ただし、このときの導体棒の速さを

$v_2$とした。このとき、回路に流れる電流は0であるから

キルヒホッフの法則により、

(イ)まで戻ると⊕が貯まることがわかる




$$-E+\underset{0}{iR}+\frac{Q_2}{C}+v_2Bl=0$$

$$\therefore -E+\frac{mv_2}{CBl}+v_2Bl=0$$

$$v_2=\frac{1}{\frac{m}{CBl}+Bl}E$$

$$=\frac{CBl}{m+CB^2l^2}E$$

(ト) (チ)の結果を①に代入して

$$Q_2 = \frac{m}{B\ell} v_2 = \frac{m}{\cancel{B\ell}} \cdot \frac{C\cancel{B\ell}}{CB^2\ell^2 + m} E$$

$$= \frac{mC}{CB^2\ell^2 + m} E$$

㊟ (リ)について　本来は不確定性原理

$$\Delta p \cdot \Delta x \gtrsim \frac{h}{4\pi}$$

$$\therefore\ m \Delta v \Delta x \gtrsim \frac{h}{4\pi}$$

$$10^{-30} \cdot \Delta v \cdot \Delta x \gtrsim 10^{-34}$$

$$\Delta v \cdot \Delta x \gtrsim 10^{-4}$$

があり、$\Delta x = 10^{-3}$ [m]（1ミリ）で位置決めしようとすると、

電子の速さは $\Delta v = 10^{-1}$ [m/s] = 0.1 [m/s] くらいでしか

定まらなくなってしまいます

本問では電子は「位置と速度がぴったり決まる粒子」というモデルで取り扱っていますが、不確定性原理があるから無意味というのではなく、「より簡単なモデルで、よりたくさんの、より複雑な実験事実を説明できる」のが物理学の醍醐味です。

以上