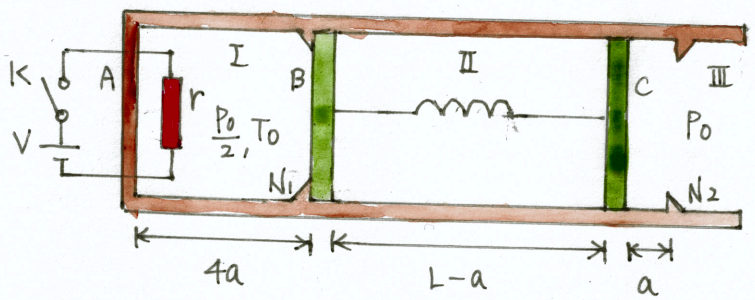
京都大学2004年　第2問

次の文を読んで、［　　］に適した式をそれぞれの解答欄に記入せよ。なお、文中に挿入された問1については、解答欄にグラフを描け。

図1のように、一端が壁Aで閉じられた、断面積Sのシリンダーがあり、摩擦なしで動くことができるピストンB, Cによって3つの空間領域Ⅰ,Ⅱ,Ⅲに分けられている。領域Ⅰには電気抵抗rのニクロム線でできたヒーターがあり、内部抵抗を無視できる超電力Vの電池とスイッチKでできた外部の回路に導線でつながれている。ピストンBにはごく細い通気口が開けられているが、最初は弁Dによって閉じられている。ピストンB,Cは、フックの法則に従う自然の長さがLのばねで結ばれている。シリンダー内には、壁Aから距離　$4a$　の位置にストッパーN_1が、さらにN_1からばねの自然長LとピストンB,Cの厚さを合わせた距離の位置にストッパーN_2が設けられ、ピストンを停止できるようになっている。ただし、Lは　$2a$　より大きい。また、ピストンとシリンダーはともに断熱材でできており、ストッパー、ばね、弁、通気口、ヒーターおよび導線の体積は、いずれも無視できるものとする。なお、大気圧をP_0とする。

図1



最初は、領域Ⅱは真空で、領域Ⅰには単原子分子理想気体が入れられ、その圧力と温度がそれぞれ　$\frac{P_0}{2}$　、　T_0　であった。また領域Ⅲは常に大気圧P_0の外気と通じている。**図1**に示したように、この状態でピストンBはストッパーN_1に接触して停止し、ピストンCはN_2から距離　a　の位置で停止していた。このことから、ばね定数は［　イ　］であることが分かる。その後、以下のように過程（1）から（4）の順にシリンダーの状態を変化させた。

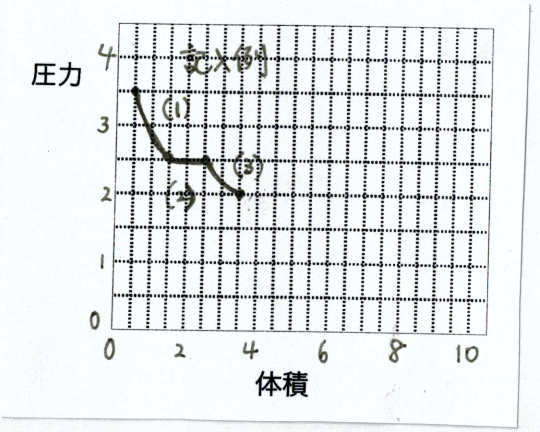
（1）スイッチKを閉じて回路に電流を流すと、領域Ⅰの気体の温度はゆっくりと上昇し、あるとき時刻にピストンBがストッパーN_1を離れ始めた。このときの領域Ⅰの気体の温度は［　ロ　］であった。電池により供給されたエネルギーがすべて気体に吸収されたとすれば、この時刻はスイッチKを閉じてから時間［　ハ　］の後である。

（2）その後、ピストンBはゆっくりと移動し、領域Ⅰの気体の温度が［　ニ　］になると、ピストンCがストッパーN_2に接触し停止した。この過程で領域Ⅰの気体が吸収した熱量は［　ホ　］である。

（3）さらにピストンBはゆっくりと移動し、ピストンB、C間の距離が縮まっていった。ばねの長さが　$L-2a$　に達した時点でスイッチKを開いた。このとき領域Ⅰの気体の温度は［　へ　］であり、過程（3）で領域Ⅰの気体が吸収した熱量は［　ト　］である。

問1　(1) から (3) までの過程における領域Ⅰの気体の状態変化の様子を、**図2**のように体積を横軸に、圧力を縦軸にとり、解答欄にグラフで示せ。グラフ用紙の横軸と縦軸の目盛りの数値は、それぞれ量　Sa　と　P_0　を1として表している。
例えば図中の×印の点は、体積が　$4Sa$　、圧力が　$3P_0$　の状態に対応する。グラフは概略を示すものでよいが、図中の**記入例**にならって、各過程の始点と終点に黒丸●を、さらに適当な位置に（1）、（2）、（3）の番号を付け、グラフのそれぞれの部分がどの過程を表すかが分かるようにすること。
＊解答欄の図は下図と同じ。

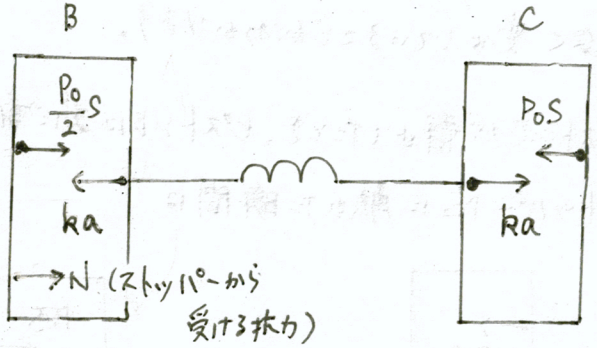
図2



（4）　その後、ピストンBの弁Dを開いたところ、ピストンBはゆっくりと動き始め、ばねは自然長に戻ったが、ピストンCはストッパーN_2に接触したままであった。
スイッチKは開いていたから、この過程は断熱変化である。ばねが自然長に戻ったとき、シリンダー内の気体の温度は［　チ　］であった。また、このときもピストンCがストッパーN_2に接触したままであったことから、ばねの自然長　L　と長さ　a　のあいだには　$\frac{L}{a} \geqq$　［　リ　］の関係が成り立っていたことが分かる。

2004 京大 第2問

(イ)



この状態でB, ばね, Cはそれぞれ静止している。従ってCについての力のつり合いより

$$P_0S = ka \quad \therefore k = \frac{P_0S}{a} \quad \cdots ①$$

(1) (ロ) 領域Iの圧力がP_1になったとき、BがストッパーN_1から離れ始めたとすると、定積変化であるから

$$(V =)\ \frac{nRT_0}{\frac{P_0}{2}} = \frac{nRT_1}{P_1} \quad \cdots ②$$

(イ)の段階において、Bについてのつり合いの式は

$$\frac{P_0}{2}S + N = ka$$

であるが、これを $\frac{P_0}{2} \to P_1$, $N \to 0$ で置き換えた式が、ストッパーN_1から離れ始めるときに成立する。

従って

$$P_1S + 0 = ka \quad \cdots ③$$

①〜③をT_1について解くと、

$$T_1 = \frac{P_1}{\cancel{nR}} \cdot \frac{\cancel{nR}T_0}{\frac{P_0}{2}} \quad (\because ②)$$

$$= 2 \cdot \frac{P_1}{P_0} T_0$$

$$= 2 \cdot \frac{\frac{ka}{S}}{P_0} T_0 \quad (\because ③)$$

$$= 2 \cdot \frac{ka}{P_0S} T_0$$

$$= 2 \cdot \frac{\frac{\cancel{P_0S}}{\cancel{a}} \cdot \cancel{a}}{\cancel{P_0S}} T_0 \quad (\because ①)$$

$$= 2T_0$$

(ハ) 単原子分子気体の内部エネルギーは「$\frac{3}{2}PV$」であるから、エネルギー保存則より

$$\underbrace{\frac{3}{2}P_1V_1}_{\text{後の内部エネルギー}} - \underbrace{\frac{3}{2}\left(\frac{P_0}{2}\right)V_0}_{\text{前の内部エネルギー}} = \underbrace{\frac{V^2}{r} \cdot t}_{\text{気体がもらったエネルギー}}$$

$$P_1 = \frac{ka}{S} = \frac{\frac{P_0 \cancel{S}}{\cancel{a}} \cdot \cancel{a}}{\cancel{S}} = P_0 \quad , \quad V_0 = V_1 = 4aS$$

③より　①より　（題意より）

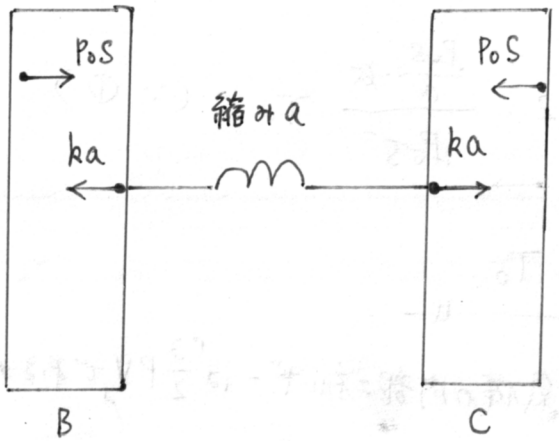
を代入すると

$$\frac{3}{\cancel{2}} P_0 \cdot \overset{2}{\cancel{4}} aS - \frac{3}{\cancel{2}} \cdot \frac{P_0}{\cancel{2}} \cdot 4aS = \frac{V^2}{r} t$$

$$6P_0aS - 3P_0aS = \frac{V^2}{r} t$$

$$t = \frac{r}{V^2} \cdot 3P_0aS$$

(2)(ニ)(ホ)「ゆっくりと移動し」は、下図のようにピストンがつり合いを↙

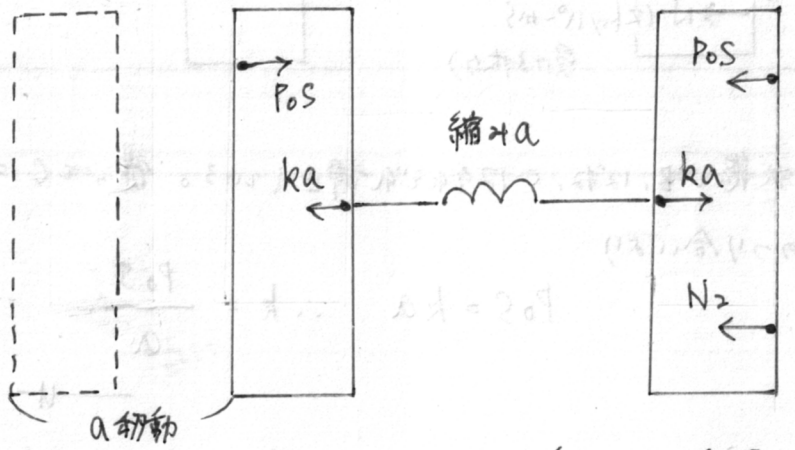


↗保ちながら移動した（とする近似）と解釈する。

※ 慣れれば、このようにしか読めなくなります。

(1)(ハ) 途中で $P_1 = P_0$ とわかりましたが、これによりピストンBにかかる力も飛躍なく変化していることがわかります。

(3)まで読むと、ピストンCが静止したとき、ピストンBはまだ動いていることがわかる。ストッパーN_2に触れた瞬間は



となります。ただしN_2はよくわからない（離れる瞬間の抗力は0だが、触れた直後の抗力はよくわからない、わからなくても良いハズ）。触れる瞬間の領域Iの圧力、体積をP_2, V_2とすると、エネルギー保存則は、気体のもらった熱量をQ_{12}として

$$\underbrace{\frac{3}{2}P_2V_2}_{\text{後の内部エネルギー}} - \underbrace{\frac{3}{2}P_1V_1}_{\text{前の内部エネルギー}} = \underbrace{Q_{12}}_{\text{もらった熱 = 未知}} - \underbrace{P_0Sa}_{\text{気体のした仕事}} \quad \cdots ④$$

となります。

また、状態方程式より

$$P_2 \underbrace{V_2}_{未知} = nR \underbrace{T_2}_{未知} \quad \cdots ⑤$$

$$P_1 V_1 = nRT_1 \quad \cdots ⑥$$

となる。④～⑥を1組の連立方程式のようにとらえ、補助的に $V_1 = 4aS$, $V_2 = (4a+a)S$ が与えられていると イメージすると整理しやすい。ここから先は、例えば Q_{12} を先に導出して

$$\frac{3}{2}P_0 \cdot (\cancel{4a}+a)S - \frac{3}{2}P_0 \cancel{4a}S = Q_{12} - P_0 S \cdot a$$

$$\left(\because P_0 = P_1 = P_2 \quad V_1 = 4aS,\ V_2 = (4a+a)S \right)$$

$$\frac{3}{2}P_0 aS = Q_{12} - P_0 S a$$

$$\therefore Q_{12} = \frac{5}{2}P_0 aS$$

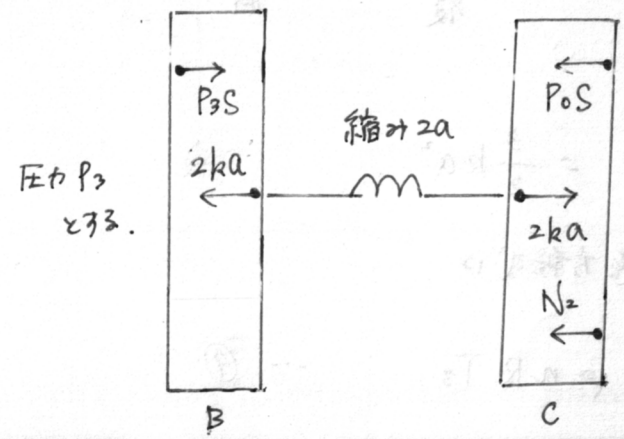
T_2 は ⑤, ⑥ より

$$T_2 = \frac{P_2 V_2}{nR} = \frac{P_2 V_2}{\frac{P_1 V_1}{T_1}}$$

$$= \frac{P_0 \cdot (4a+a)S}{P_0 \cdot 4aS} \cdot T_1 \quad \left(\because V_1 = 4aS,\ V_2 = (4a+a)S \right)$$

$$= \frac{5}{4}T_1 \underset{\substack{\uparrow \\ (ロ)の結果}}{=} \frac{5}{4} \cdot 2T_0 = \frac{5}{2}T_0$$

(3) スイッチを開いた時、



となっている。Bは止まっていない。Bは「ゆっくりと移動し」とあるので、つり合いを保ちつつ移動した(と近似した)と考える。

$$\therefore P_3 S = 2ka$$

$$P_3 = \frac{2ka}{S} = 2P_0 \quad (\because ①) \cdots ⑦$$

エネルギー保存則は

$$\underbrace{\frac{3}{2}P_3V_3}_{\text{後の内部エネルギー}} - \underbrace{\frac{3}{2}P_2V_2}_{\text{前の内部エネルギー}} = \underbrace{Q_{23}}_{\text{もらった熱}} - \underbrace{W_{23}}_{\text{気体のした仕事}} \quad \cdots ⑧$$

$\text{もらった熱} = \text{未知}$

となる。気体のした仕事 W_{23} はバネの内部エネルギーの増加に等しいから

$$W_{23} = \underbrace{\frac{1}{2}k(2a)^2}_{\text{後}} - \underbrace{\frac{1}{2}ka^2}_{\text{前}}$$

$$= \frac{3}{2}ka^2$$

である。また、状態方程式は

$$P_3V_3 = nRT_3 \quad \cdots ⑨$$

$$P_2V_2 = nRT_2 \quad \cdots ⑩$$

⑧～⑩を連立方程式のようにとらえ、補助的に⑦、

$V_3 = (4a+2a)S$, $V_2 = (4a+a)S$, (2)の結果

$T_2 = \frac{5}{2}T_0$ を使ってみる。

⑧を変形して

$$\frac{3}{2}\cdot(2P_0)\cdot(4a+2a)S - \frac{3}{2}\cdot P_0\cdot(4a+a)S$$

$$= Q_{23} - \frac{3}{2}ka^2$$

$$\therefore \frac{3}{2}\cdot 2P_0\cdot 6aS - \frac{3}{2}P_0\cdot 5aS = Q_{23} - \frac{3}{2}\cdot\frac{P_0S}{\cancel{a}}\cdot a^{\cancel{2}}$$

$$\therefore \frac{3}{2}\cdot 7P_0aS = Q_{23} - \frac{3}{2}P_0aS$$

$$Q_{23} = \frac{3}{2}(7+1)P_0aS$$

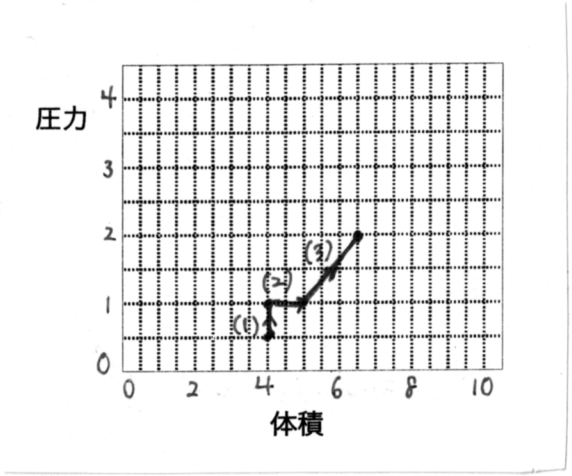
$$= 12P_0aS$$

また、⑨より

$$T_3 = \frac{P_3V_3}{nR} = \frac{P_3V_3}{\frac{P_2V_2}{T_2}} = \frac{2P_0\cdot(4a+2a)S}{P_0\cdot(4a+a)S}T_2$$

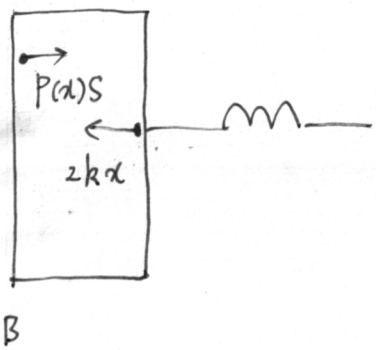
$$= \frac{12}{5}T_2 = \frac{12}{5}\cdot\frac{5}{2}T_0 = 6T_0$$

問1. ここまでの過程をまとめると、以下のようになる。



〈(3)が直線になる理由〉

(3)の途中のピストンBについて考える。



適当にxの原点を取れば、上図のようにつり合いの式が立てられる ⇒ P(x)はxに比例

ところで、V(x)はxの1次関数であるから

P(x)はV(x)の1次関数になる。よって(3)は直線

(4) 出題者の言ってる「断熱変化」は気体とバネからなる系が外部とエネルギーのやり取りをしていないという意味。

断熱変化の式（PV^{γ}=一定）は気体だけの系で、外部とエネルギーのやり取りをしていないときに成立するので注意。

気体とバネからなる系について、エネルギー保存則を考える。均一になった後での圧力、体積をP_4, V_4とすると

$$\left(\frac{3}{2}P_4V_4+\frac{1}{2}k\cdot\underset{\text{自然長}}{0^2}\right)-\left(\frac{3}{2}P_3V_3+\frac{1}{2}k(2a)^2\right)=0 \quad \cdots ⑪$$

であり、 $V_4=(4a+L)S$ である。

また、状態方程式は

$$P_4V_4=nRT_4 \quad \cdots ⑫$$

$$P_3V_3=nRT_3 \quad \cdots ⑬$$

である。①, ⑦, ⑪より

$$\frac{3}{2}P_4(4a+L)S-\frac{3}{2}\cdot 2P_0\cdot(4a+2a)S-\frac{1}{2}\cdot\frac{P_0S}{\cancel{a}}\cdot 4a^{\cancel{2}}=0$$

両辺×2

$$3P_4(4a+L)\cancel{S} - 36P_0a\cancel{S} - 4P_0a\cancel{S} = 0$$

$$3P_4(4a+L) = 40P_0a$$

$$P_4 = \frac{40a}{3(4a+L)}P_0$$

また、②より

$$T_4 = \frac{P_4V_4}{nR} = \frac{P_4V_4}{\frac{P_3V_3}{T_3}}$$

$$= \frac{\frac{40a}{3\cancel{(4a+L)}}\cancel{P_0}\cdot\cancel{(4a+L)}\cancel{S}}{2\cancel{P_0}\cdot(4a+2a)\cancel{S}}T_3$$

$$= \frac{\overset{\cancel{20}\,10}{\cancel{40}a}}{\cancel{2}\cdot 3\cdot\underset{3}{\cancel{6}}a}T_3$$

$$= \frac{10}{9}T_3 = \frac{10}{\underset{3}{\cancel{9}}}\cdot\overset{2}{\cancel{6}}T_0 = \frac{20}{3}T_0$$

(1) $P_4 < P_0$ ならば、ピストンCは左に移動し始める。

従って求める条件は $P_4 \geqq P_0$ であり、

$$\therefore \frac{40a}{3(4a+L)}P_0 \geqq P_0$$

$$40a \geqq 12a + 3L \qquad \therefore \frac{a}{L} \geqq \frac{3}{28}$$

以上.