京大2002年第3問

次の文を読んで、文中の［　　］に適した式または数値を、それぞれの解答欄に記入せよ。［　　］はすでに［　　］で与えられたものと同じものを表す。

なお、微小量 x（ $|x| \ll 1$ ）および実数 a に対して成り立つ近似式 $(1+x)^a = 1+ax$ を用いよ。

音波と電波の両方を同時に用いると、以下のようにしていろいろな高度での音速を測定することができ、測定された音速から大気の温度の高度分布を知ることができる。ここで音速を v_s で表し、電波の速さを真空中の光速 c（$= 3.00\times10^8$ m/s）と等しいとする。音速 v_s は光速 c より十分小さいので $\frac{v_s}{c}$ は微少量であることを留意せよ。

大気は通常では電波を反射しない。しかし、図1に示すように音波を発射して大気の密度の増減を引き起こすと、電波を反射する面が音波の波長に等しい間隔でいく重にもあらわれ、地上から発した電波の一部は、これらの面で反射して再び地上で戻ってくる。この反射面の間隔は音波の振動数を f_s とすると［ ア ］である。

図1に示すように、地上から垂直に上空に向け、振動数 f_s の音波を短時間発した。音波を発して時間 t_1 後に、音波と同じ方向に、やはり短い時間だけの電波を発射したところ、電波を発して時間 t_2 後に地上に戻ってきた電波が観測された。このことから反射が生じた高度は $h=$［ イ ］であることがわかる。

電波に対しても音波など一般の波と同じようにドップラー効果を考えることができ、観測者および波動の動く速さが光速より十分小さいときには、ドップラー効果の関係式は音波の場合と同じになる。よって、音速 v_s で上昇する仮想的な観測者には電波の振動数は発射した電波の振動数 f からずれてみえ、$f-\Delta f_1$ と表される。ここで振動数のずれ Δf_1 は［ ウ ］となる。
したがって、反射してきた電波を地上で測定するとその振動数は $f-\Delta f_2$ と表すことができる。ここで振動数のずれ Δf_2 は［ エ ］となり、これより高度 h における音速を知ることができる。

このような観測では地上に戻る電波が強いことが望ましい。そこで発射する電波の振動数 f を変えて繰り返し発射し、反射してくる電波の強度を観測した。その結果、電波の強度は振動数 f とともに大きく変化し、 $f=f_0$ のとき最大になった。その理由を考えてみよう。

電波の速さは音速 v_s で上昇する観測者に対しても光速 c に等しいので振動数 f で発射した電波に対して、この観測者が見る波長 $\lambda=$［ オ ］となる。したがって、異なった反射面で反射される波が互いに強めあう条件は、自然数 n を用いて $\lambda=$［ カ ］となる。この関係式において $n=1$ とおくと、音波は電波の振動数 f_0 を用いて $v_s=$［ キ ］と表すことができる。ただし $\frac{f_s}{f_0}$ は微少量なので $\left(\frac{f_s}{f_0}\right)^2$ を含む項は無視せよ。

音速は高度とともに変化する大気圧には直接依存せず、大気を構成している分子の速さの平均（二乗平均速度）で近似的に与えられることがわかっているので、音速は絶対温度 T の［ ク ］乗に比例することになる。したがって、いろいろな高度で音速を測定すれば、それぞれの高度における大気の温度を知ることが出来る。

例えば、ある観測の結果、 $\frac{\Delta f_2}{f}=2.00\times10^{-6}$ であったとすると、 Δf_2 が［ エ ］で与えられることを用いて、電波が反射された高度での音速は［ ケ ］m/s，温度は［ コ ］℃となる。それぞれ有効数字3桁および2桁で答えよ。
ここで、音速は−3℃において330m/sであるとして計算せよ。

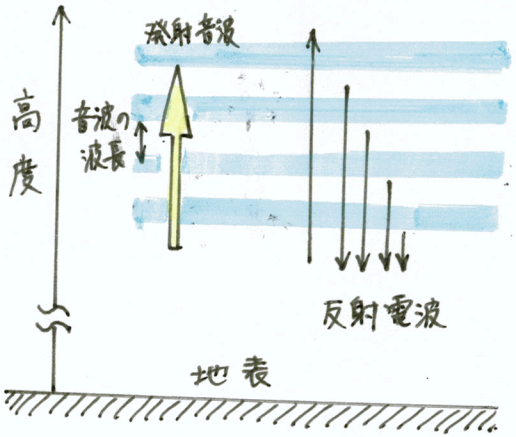
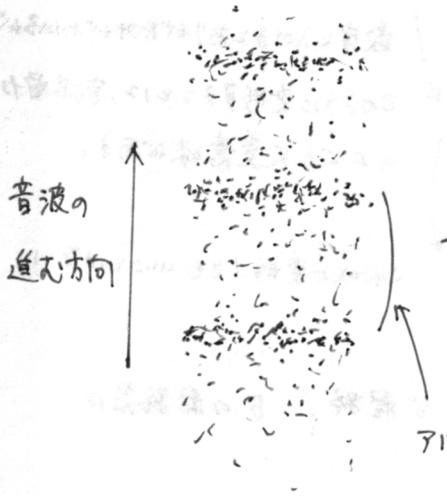


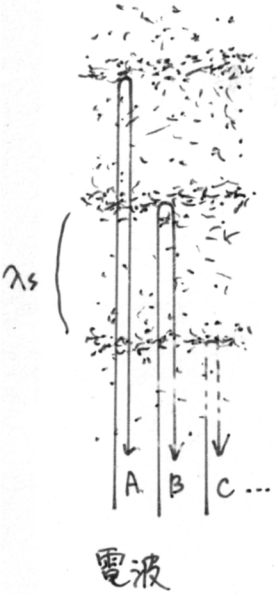
図1

京大 2002 第3問



音波を地上から上に向けて発射すると，左図のように空気の疎密が出来る。黒い模様が音の伝播と共に上に動く。

アはこの間隔を訊いている。



そこに，さらに電波を発射すると，空気の濃い部分で電波が発射される（矢印A）。

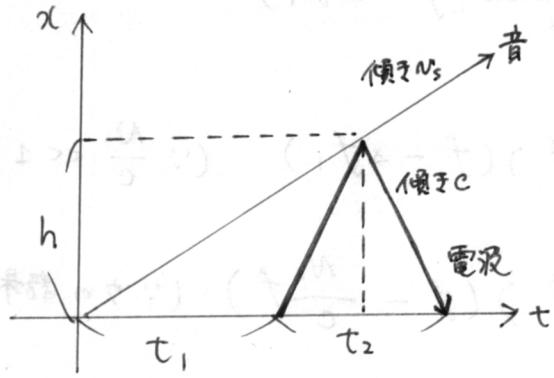
Aだけの反射では反射波は大した振幅にならないが，B，C，… で反射された波を重ね合わせると強く観測することが出来る。

その干渉条件をキまでの誘導で考えさせている。

さらに，$N_{音速} \fallingdotseq N_{分子}$ であることを使うと，上空の気温を測定できる。

ア $\lambda = \dfrac{N_s}{f_s}$ N_s ↑ s は sound の略であろう。

イ ダイヤグラムを書くと，こうなっている。t_1 と t_2 がグラフでどこなのか，しっかり把握すること。



キ／ハジ

$c = \dfrac{h}{\frac{t_2}{2}}$

$\therefore t_2 = \dfrac{2h}{c}$

ウ 典型問の「動く力べで反射した音」のドップラー効果と同じように考える。

ドップラー効果の公式より

$$\underbrace{f - \Delta f_1}_{\text{「公式の}f'\text{がコレ」と読み取れたらしめたもの}} = \frac{c - N_s}{c} f \underbrace{= f - \frac{N_s}{c} f}_{\text{式変形}}$$

$$\therefore \Delta f_1 = \frac{N_s}{c} f$$

エ　ウと同様に，ドップラー効果の公式を当てはめると

$$f - \Delta f_2 = \frac{c}{c + v_s}(f - \Delta f_1)$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{v_s}{c}}(f - \Delta f_1)$$

$$\fallingdotseq \left(1 - \frac{v_s}{c}\right)(f - \Delta f_1) \quad \left(\because \frac{v_s}{c} \ll 1\right)$$

$$= \left(1 - \frac{v_s}{c}\right)\left(f - \frac{v_s}{c}f\right) \quad (\because \text{ウの結果})$$

$$= \left(1 - \frac{v_s}{c}\right)^2 f$$

$$\fallingdotseq \left(1 - \frac{2v_s}{c}\right) f \quad \left(\because \frac{v_s}{c} \ll 1 \text{ なので } \left(\frac{v_s}{c}\right)^2 \text{を省略}\right)$$

$$\therefore \Delta f_2 = \frac{2v_s}{c} \cdot f \quad \cdots エ$$

オ　「$\lambda = \frac{v}{f}$」に「音速v_sで上昇する観測者」が観測する$v(=c)$，$f(=f-\Delta f_1)$を代入する。

$$\therefore \lambda = \frac{c}{f - \Delta f_1}$$

← 解答に使う文字の指定がないので，これでも点がもらえると思う。

$$= \frac{c}{\left(1 - \frac{v_s}{c}\right)f} \quad (\because ウ)$$

$$\fallingdotseq \left(1 + \frac{v_s}{c}\right) \cdot \frac{c}{f} \quad \cdots オ$$

実際に$\frac{v_s}{c} \ll 1$の適当な数字を入れるとありがたみがわかるが，このように変形することは，計算力の上でも大変意味がある。

これ以上変形してもいいことはない。

カ　干渉条件を考える。①ページ左下の図で経路A，Bの経路差は音の波長を$\lambda_s\left(=\frac{v_s}{f_s}\right)$として

$$2\lambda_s = \frac{\lambda}{2} \cdot \underbrace{\text{偶数}}_{\text{1回反射をおこした波同士の干渉}} \quad \cdots ①$$

となる。

オの関係と自然数nを使うと①は

$$2\lambda_s = \frac{\lambda}{2} \cdot 2n \quad \cdots ②$$

$$2\lambda_s \fallingdotseq \left(1 + \frac{v_s}{c}\right)\frac{c}{f} \quad \cdots ③$$

と，②③の2通りに書けるから

$$n\lambda = \left(1 + \frac{v_s}{c}\right)\frac{c}{f}$$

$$\lambda = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{v_s}{c}\right)\frac{c}{f} \quad \cdots カ$$

キ v_s を求めるので，v_s を含んだ式，つまり λ_s を使うことが必要である。

②に力の結果と $n=1$，$f=f_0$ を代入して

$$2\lambda_s \fallingdotseq \frac{1}{2n}\left(1+\frac{v_s}{c}\right)\frac{c}{f_0}\cdot 2n$$

$$\therefore\ 2\frac{v_s}{f_s} \fallingdotseq \left(1+\frac{v_s}{c}\right)\frac{c}{f_0}$$

これを $\frac{f_s}{f_0}<<1$ かつ $\frac{v_s}{c}<<1$ の下で v_s について解く。

（$\frac{f_s}{f_0}$ をまとめて，$\frac{v_s}{c}$ をまとめて扱うイメージで式変形）

$$2\cdot\frac{v_s}{c}\cdot\frac{1}{f_s}=\left(1+\frac{v_s}{c}\right)\frac{1}{f_0}$$

$$2\frac{v_s}{c}=\left(1+\frac{v_s}{c}\right)\frac{f_s}{f_0}$$

$$2\frac{v_s}{c}\left(1-\frac{v_s}{c}\right)=\frac{f_s}{f_0}$$

$(1+x)\fallingdotseq(1-x)^{-1}$ for $|x|<<1$

$\left(\frac{v_s}{c}\right)^2$ の項を落とすと ← $\frac{v_s}{c}$ は微小量なので

$$2\frac{v_s}{c}=\frac{f_s}{f_0}\qquad\therefore v_s=\frac{1}{2}\cdot\frac{f_s}{f_0}\cdot c\ \cdots キ$$

$\left(\frac{f_s}{f_0}\right)^2$ を落としていないが，たまたま出てこなかっただけで，これはこれでOK。赤い参考書のようなルートで解くと，$\left(\frac{f_s}{f_0}\right)^2$ が出てくる。

③

ク 問題文は「$v_s=v_{分子}$ とみなせ」と言っている。

※注

$$\frac{1}{2}m v_{分子}^2=\frac{3}{2}kT$$

（k はボルツマン定数）

↖ 授業でもうやった？

この3は空間が3次元であることに起因する「3」（暗記）

本問では忘れていても解けるのでがんばって。

$\therefore v^2\propto T$ ← 比例記号を使ってラクをすべき

$\therefore v\propto\sqrt{T}$ クは $\frac{1}{2}$

ケ エの結果より

$$\frac{2v_s}{c}=\frac{\Delta f_2}{f}$$

$$\therefore\ \frac{2v_s}{3.00\times10^8}=2.00\times10^{-6}$$

有3ケタでめんどくさい感じはするけど，両辺に2があってラッキー!!

↙ 秒速300m，そんなもんかとチェック

$$\therefore v_s=3.00\times10^2\ [s]$$

コ　クの途中式より　$\frac{1}{2}mv_s^2 = \frac{3}{2}kT$

$$\therefore T = \frac{m}{3k}v_s^2$$

このような数値代入問題では，k, mを無理して出そうとせず，

$\frac{m}{3k}$ をブラックボックスとみなす感覚で扱うと早いし，$\frac{m}{3k}$ を間違っていても

被害がない。 -3 [°C] で 330 [m/s] だから

$$270_{[K]} = \frac{m}{3k}\cdot 330^2$$

$$\therefore \frac{m}{3k} = \frac{270}{330^2} \quad \cdots ④$$

$$\therefore \text{求める } T = \frac{270}{330^2}\cdot 300^2$$

（$\frac{270}{330^2}$ は ④より，300^2 はクの結果）

$$= 270\left(\frac{300}{330}\right)^2 = 270\cdot\left(\frac{10}{11}\right)^2$$

（ここからまじめに計算）

$$= 223.1 \text{ [K]}$$

最後に [°C] に戻して　　コ … -50 °C

（-50 °C，そんなもんかとチェック）

以上

※注 以降，大気を単原子分子として
計算していますが，二原子分子としても答えは
変わらないです。
力量に自信のある人は，何が起こっているのか
調べてみて下さい!!