京都大学　1997年第3問

次の文を読んで、$\boxed{\quad}$に適した式または数をそれぞれの解答欄に記入せよ。

格子定数 d [m] で N 個のスリットを持つ回折格子に、図1のように波長 λ[m] の平行光線を垂直に入射させる。スリットを通って角度 θ[rad] 方向に回折する光を d に比べて十分遠方の点で観測するとき、隣り合うスリットを通る光の道のりの差は $\boxed{\text{あ}}$ [m] となり、位相差は $\Delta = \boxed{\text{い}}$ [rad] である。そして、整数 m を用い、Δ が $\boxed{\text{う}}$ と表されるとき、全ての回折光が強め合って明線となる。以下、この位相差を Δ_m[rad] とする。整数 m を明線の次数という。

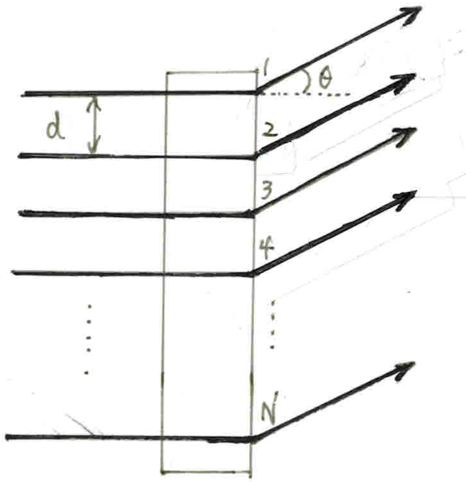


図1

光は一種の波動であり、正弦波で表すことができる。光の強度は振幅の2乗に等しいので、各スリットからの光の波の振幅を A_0 とすると、明線の位置での光の強度 K_0 は、N、A_0 を使って $K_0 = \boxed{\text{え}}$ と表される。実際には、明線と明線の間には弱い回折光が現れる。以下では、m 次と $(m+1)$ 次の明線の間での回折光の振舞いを一般的に考察する。なお、必要に応じて、微小な角 α に対して、$\sin\alpha \fallingdotseq \alpha$、$\cos\alpha \fallingdotseq 1$ と近似してもよい。

観測点でのスリット1からの光の波の変位は、図2(a)のように、大きさの A_0 のベクトル $\vec{A_1}$ のy軸への射影に対応し、その位相はx軸と $\vec{A_1}$ のなす角に対応する。ここで、N個の各スリットからの光の波を同じ大きさ A_0 を持つベクトル $\vec{A_1}, \vec{A_2}, \vec{A_3}, \cdots, \vec{A_N}$ で表そう。隣り合うスリットからの光の位相差は全て Δ であるので、これらのベクトルは、Δ_m からのずれを $\delta = \Delta - \Delta_m$ として、図2(a)のように表される。重ね合わされた光のベクトル $\vec{A_s} = \vec{A_1} + \vec{A_2} + \vec{A_3} + \cdots + \vec{A_N}$ は、図2(b)のように表せ、その強度は$|\vec{A_s}|^2$で与えられる。

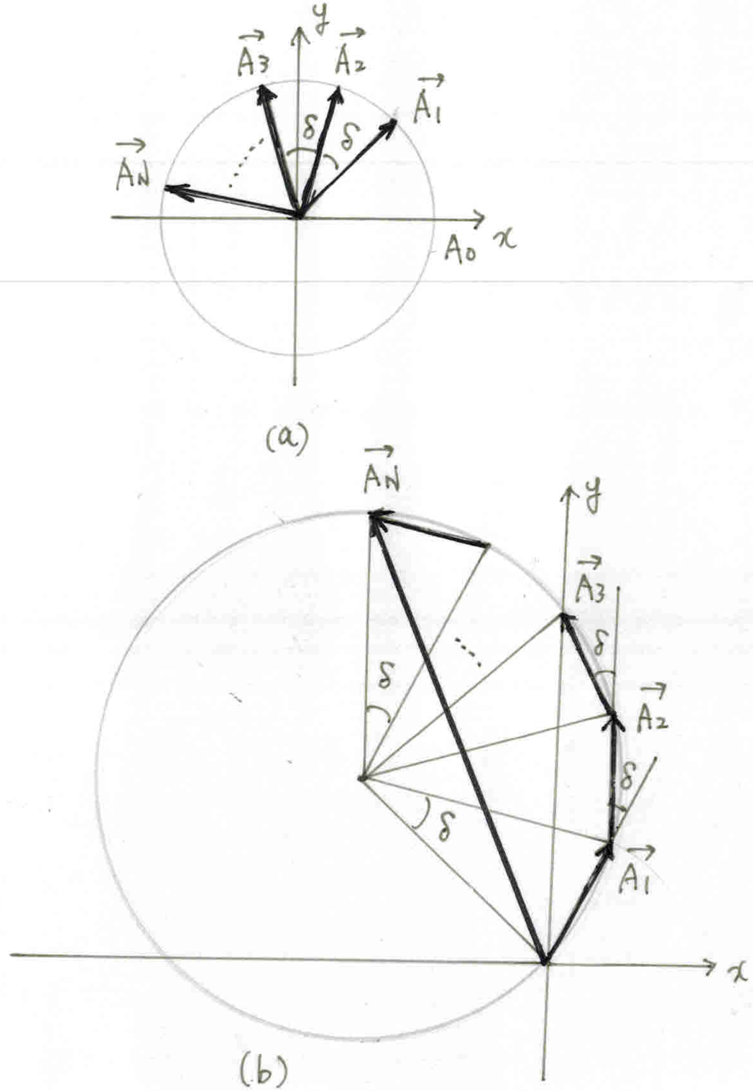


図2

図 3(a)は、位相差 Δ を横軸に取り、m 次と（$m\pm1$）次の明線を含む光の強度を示したものである。

図 3(b)は、図 3(a)の横軸を δ にとり、m 次の明線の付近を拡大したものであるが、重ね合わされた光の強度 $|\vec{A_s}|^2$ が厳密に 0 となる点が存在する。これらの点は、図 2(b)のベクトル $\vec{A_s}$ の大きさが 0 となる条件から決まる。$\delta=0$ から数えて n 番目のこのような点は $\delta=$ $\boxed{\text{お}}$ で与えられる。以下、これを δ_n と書く。

次に、任意の δ で回折光の強度 $|\vec{A_s}|^2$ を求める。図 2(b)のように $\vec{A_1}, \vec{A_2}, \vec{A_3}, \cdots, \vec{A_N}$ の始点と終点がすべて同一の円周上あることに着目すると、A_0、δ、N を用いて $|\vec{A_s}|^2=$ $\boxed{\text{か}}$ となる。図 3(b)の δ_1 と δ_2 の間に極大値が現れるが、この値は $\delta=\dfrac{\delta_1+\delta_2}{2}$ での $|\vec{A_s}|^2$ の値 K_1 に非常に近い。この強度 K_1 と明線の位置での強度 K_0 の比は N が非常に大きい時には一定の数となり、π を用いて $\dfrac{K_1}{K_0}=$ $\boxed{\text{き}}$ と書ける。したがって、この極大値は図 3 に示されるように、明線の位置での光の強度に比べて小さいことがわかる。

m 次の明線の位相差 Δ_m に対応して m 次の明線が観測される角度を θ_m[rad]、位相差 $\Delta_m+\delta$ に対応して回折光の強度が 0 になる角度 θ_m'[rad]を $\theta_m+\beta_m$ とする。角度 θ_m' 方向での隣り合うスリットからの光の道のりの差は λ、N、m を用いて $\boxed{\text{く}}$ と表される。
N が非常に大きい時には、β_m は非常に小さくなり、$\beta=\dfrac{b_m}{N}$ と書け、b_m は d、λ、θ_m を用いて

$\boxed{\text{け}}$ と表される。

以上の考察から、非常に多数のスリットを持つ回折格子によって作られる明線は、非常に強く、鋭いピークを形成することが定量的に理解できる。

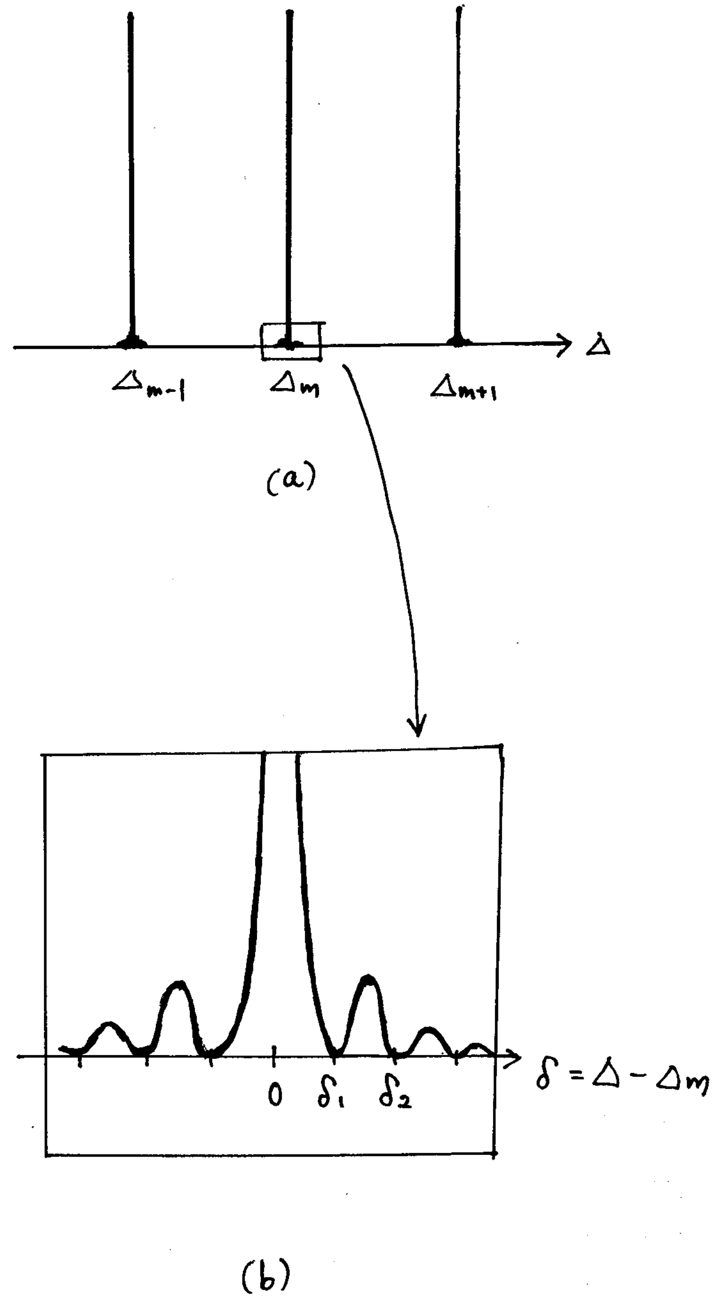
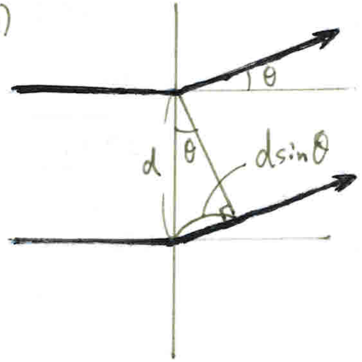


図 3

広島あおば物理塾
(082) 274-9555

1997 京大 第3問

(あ)



$d\sin\theta$ //

(い) 左図の光の道のり上で，位置がλずれると，位相が2πずれる。

$$\lambda : 2\pi = d\sin\theta : \underbrace{\overset{\text{デルタ}}{\Delta}}_{\text{ココを求める}}$$

$$\therefore \Delta = 2\pi \frac{d\sin\theta}{\lambda}$$ //

(う) 強め合う条件は

$$d\sin\theta = m\lambda \quad \cdots ①$$

これを(い)の結果に代入して

$$\Delta = 2\pi \cdot \frac{m\lambda}{\lambda} = 2m\pi$$ //

以下，出題者は $\Delta_m = 2m\pi$ と定義している。

((う)が正答できないと，Δ_m の定義がわからない…すごい問題だ)

(え) 答えは $(NA_0)^2$ だけど，もう少し詳しく。

明線の位置での光の強度を求めたいわけだが，

「k番目のスリットを通過した光」のスクリーン上の振幅 $f_k(t)$ は，適当に時刻の原点をとれば

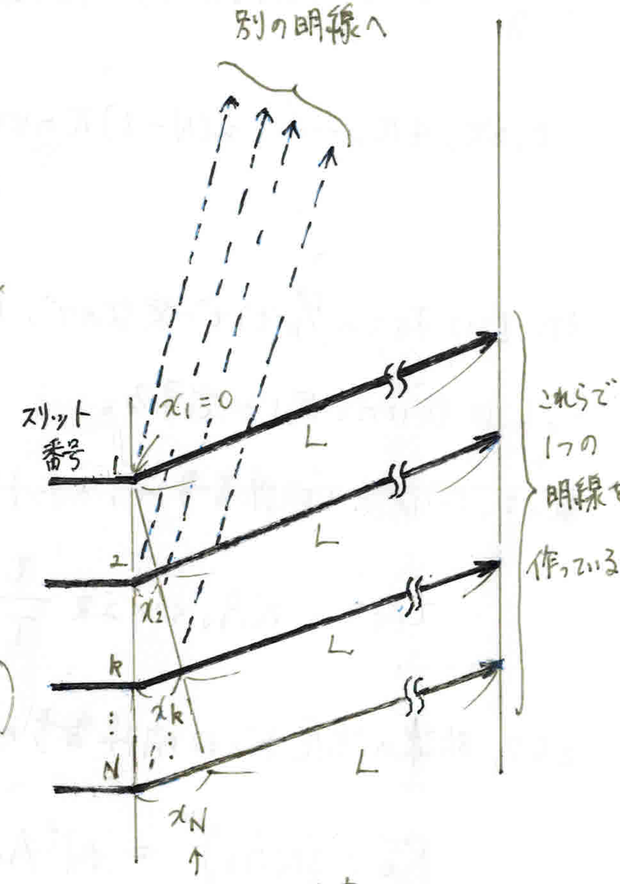
$$f_k(t) = A_0 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{L+x_k}{\lambda}\right) \quad \cdots ②$$

と書ける。従って観測する光の強度 $f(t)$ は，重ね合わせの原理より

☆(次ページ表 参照)

$$f(t) = \sum_{k=1}^{N} f_k(t) = \sum_{k=1}^{N} A_0 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{L+x_k}{\lambda}\right) \quad \cdots ③$$

となる。



光路差は，題意よりここだけ考える。

[図1]

$\frac{2\pi x_k}{\lambda}$ は (う)の議論より，すべての明線番号 m，スリット番号 k で

$0, 2\pi, 4\pi, \cdots, 2(N-1)\pi$ のどれかとなる。

Nはスリットの個数

また，Lはすべての $f_k(t)$ で一定なので，時刻の原点を適当に取り直せば，Lは無いのと同じに出来る。

従って，③はどの明線番号 m，スリット番号 k でも

$$f(t) = NA_0 \sin 2\pi \frac{t}{T} \quad \cdots ④$$

となり，明線の強度 K_0 は明線番号 m にかかわらず

$$K_0 = (NA_0)^2 = N^2 A_0^2 \quad \cdots (え)$$

ここで表1に，各明線，スリットにおける③式の☆部部を表でまとめておく。「Δ_m とは何ぞや？」をしっかり把握できるとgood.

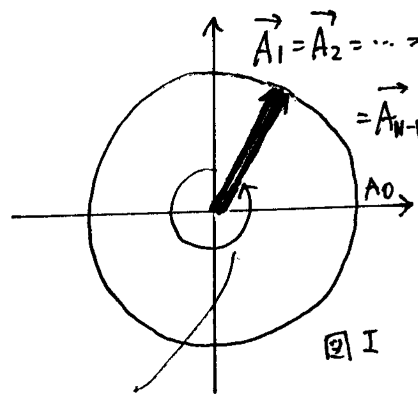
広島あおば物理塾
(082)274-9555

明線が違うと同じx_1でも異なる長さ（[図1]の実線と点線の长を参照）

スリット＼明線	1		2		⋯	m		⋯
1	$\frac{2\pi x_1}{\lambda}$	差が Δ_1	$\frac{2\pi x_1}{\lambda}$	Δ_2	⋯	$\frac{2\pi x_1}{\lambda}$	Δ_m	
2	$\frac{2\pi x_2}{\lambda}$	Δ_1	$\frac{2\pi x_2}{\lambda}$	Δ_2	⋯	$\frac{2\pi x_2}{\lambda}$	Δ_m	
⋮	⋮		⋮			⋮		
k	$\frac{2\pi x_k}{\lambda}$		$\frac{2\pi x_k}{\lambda}$		⋯	$\frac{2\pi x_2}{\lambda}$		⋯
⋮	⋮		⋮			⋮		
N	$\frac{2\pi x_N}{\lambda}$		$\frac{2\pi x_N}{\lambda}$		⋯	$\frac{2\pi x_N}{\lambda}$		⋯

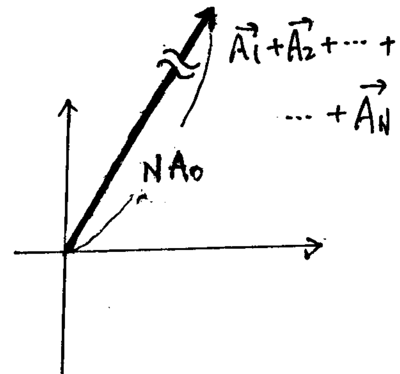
[表1] ③式の☆部分

(お) ③式のsin関数を単位円で表現すると，m番目の明線では



これを書き直すと

図I

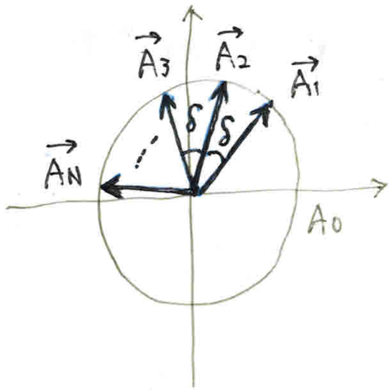


図II

kが1つ違うとΔ_m位相が違う（つまりm周違う）ベクトルとなり，重なる。

「m番目の明線」ではないところでは、図Iのように重ならない。

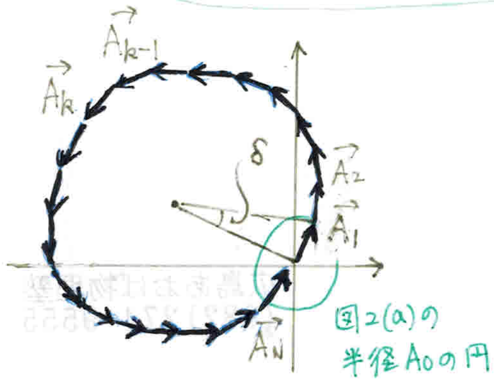
その代わりに、図Iで言うと、角度がδずつズレしたベクトルを足し合わせることになる(問題文図2(a))。



問題文図2(a)

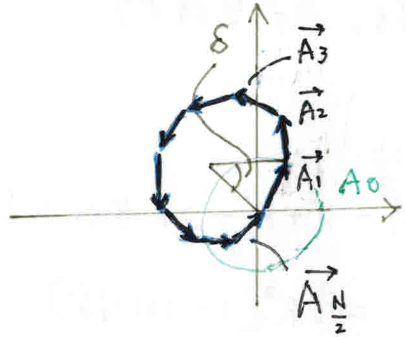
ここで $\vec{A_1}, \vec{A_2}, \cdots, \vec{A_N}$ の根元を動かし、問題文図2(b)のような多角形を作ってみると、明線付近の暗線では、うまく原点に戻る正多角形になる(問題文図2(b)、それから下の例2つ)。

原点に戻る $\Leftrightarrow$ $\vec{A_1}+\vec{A_2}+\cdots+\vec{A_N}=0$



例　正N角形を作っている場合

(後述の n=1)



例　正$\frac{N}{2}$角形を作っている場合

(後述の n=2)

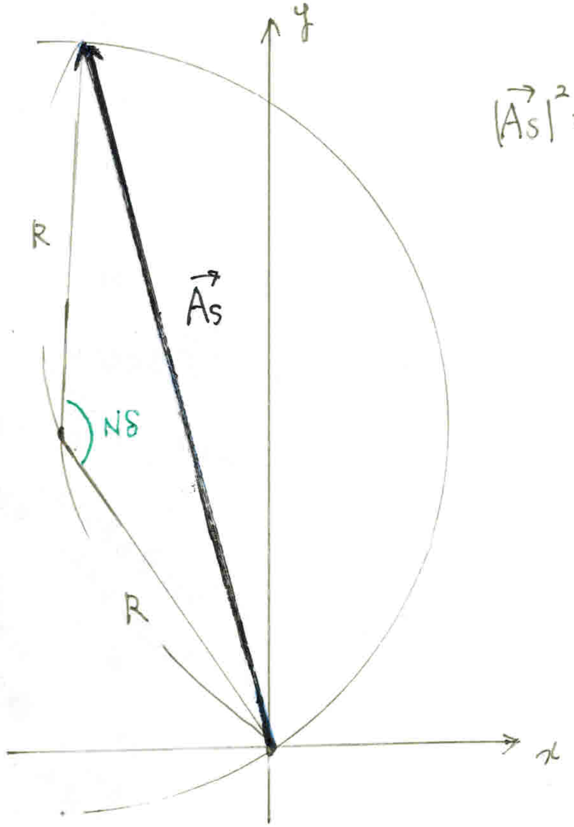
明線付近の暗線を、明線から近いものから順に 1, 2, …, n, … と番号づける。nが大きい程、各$\vec{A_k}$の向きのズレが大きくなり、$\vec{A_1}, \vec{A_2}, \cdots, \vec{A_N}$ が正$\frac{N}{n}$角形を形成しているから、

$$\frac{N}{n}\cdot\delta = 2\pi$$

$$\therefore\ \delta = \frac{2n\pi}{N} \quad \cdots (お)$$

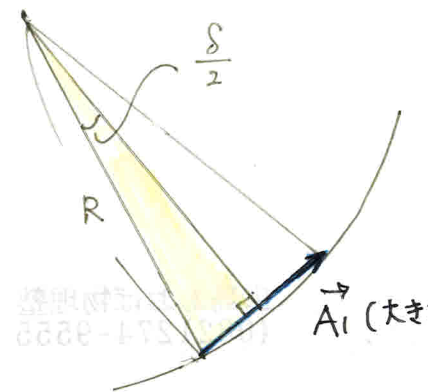
δは負もありうる。そのときは正N/n角形の矢印が逆になる。ただし、図3(b)からδが正のところしか論じてい…模様。

(か) 問題文図3(b)の半径をRとする。余弦定理より



$$|\vec{A_s}|^2 = R^2 + R^2 - 2R\cdot R\cos N\delta$$
$$= 2R^2(1-\cos N\delta) \quad \cdots ⑤$$

次にRを求める。黄色の三角形に着目して



$$\sin\frac{\delta}{2} = \frac{\frac{A_0}{2}}{R}$$

$$\therefore R = \frac{A_0}{2\sin\frac{\delta}{2}} \quad \cdots ⑥$$

⑥を⑤に代入して整理すると

$$|\vec{A_s}|^2 = 2\cdot\left(\frac{A_0}{2\sin\frac{\delta}{2}}\right)^2(1-\cos N\delta) \quad \cdots ⑦ \quad (か)$$

これでもマルだが、他に出回っている解答と合わせるために変形しておくと、

$$|\vec{A_s}|^2 = 2\cdot\frac{A_0^2}{4\sin^2\frac{\delta}{2}}\cdot\left(1-\cos 2\cdot\frac{N\delta}{2}\right)$$

$$= \cancel{2}\cdot\frac{A_0^2}{\cancel{4}\sin^2\frac{\delta}{2}}\cdot\cancel{2}\sin^2\frac{N\delta}{2}$$

$$= A_0^2\,\frac{\sin^2\frac{N\delta}{2}}{\sin^2\frac{\delta}{2}}$$

(き) (お)より $\delta_1 = \frac{2\pi}{N}$，$\delta_2 = \frac{4\pi}{N}$ なので

m番目の明線に一番近い極大値 K_1 は

$\delta \fallingdotseq \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} = \frac{3\pi}{N}$ のときの $|\vec{A_S}^2|$ である。

この問題の作者は、
図3(b)の図形の対称性から
「どまんなか」に近いだろうと
主張している

(か)の結果，⑦式を使うと

$$K_1 = 2\cdot\left(\frac{A_0}{2\sin\frac{3\pi}{2N}}\right)^2\left(1-\underbrace{\cos \cancel{N}\cdot\frac{3\pi}{\cancel{N}}}_{=-1}\right)$$

$$= \frac{A_0^2}{\cancel{2}\sin^2\frac{3\pi}{2N}}\cdot\cancel{2} \fallingdotseq \frac{A_0^2}{\left(\frac{3\pi}{2N}\right)^2}$$

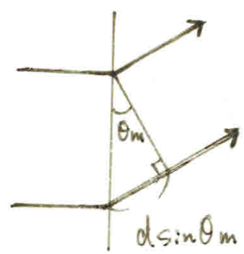
$\sin x \fallingdotseq x$ を用いた

$$= \frac{4N^2}{9\pi^2}A_0^2$$

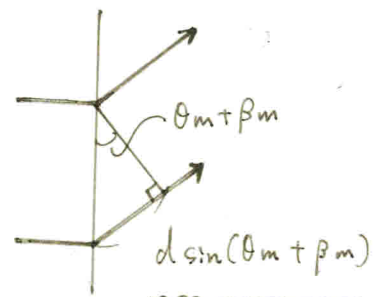
(え)の結果より $K_0 = N^2 A_0^2$ なので $\frac{K_1}{K_0} \fallingdotseq \frac{4}{9\pi^2}$ …(き)

(く)

m番目の明線のとき



m番目の明線に最も近い暗線のとき (n = 1)



コレをλ，N，mを用いて表せという問題

位相差と道のりは比例するので

$$\Delta_m : d\sin\theta_m = \Delta_m + \delta_1 : d\sin(\theta_m+\beta_m) \quad \cdots ⑧$$

(う)の結果より $\Delta_m = 2m\pi$，(お)の結果より $\delta_1 = \frac{2\pi}{N}$ であるから

⑧は

$$2m\pi : d\sin\theta_m = 2m\pi + \frac{2\pi}{N} : d\sin(\theta_m + \beta_m)$$

$$\therefore d\sin(\theta_m+\beta_m) = \frac{\left(2m\pi + \frac{2\pi}{N}\right)\boxed{d\sin\theta_m}}{2m\pi}$$

問題の指示により、使っちゃいけない文字。

(あ)より $m\lambda$ にする。

$$= \frac{\left(2m\pi + \frac{2\pi}{N}\right)\cdot \cancel{m}\lambda}{2\cancel{m}\pi}$$

$$= \left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda \quad \cdots (く)$$

(け)　(く)の結果

$$d\sin(\theta_m+\beta_m) = \left(m+\frac{1}{N}\right)\lambda$$

を題意より $\beta_m = \frac{b_m}{N}$ と書きかえると、

$$d\sin\left(\theta_m + \frac{b_m}{N}\right) = \left(m+\frac{1}{N}\right)\lambda$$

$$\therefore d\left(\sin\theta_m \underbrace{\cos\frac{b_m}{N}}_{\fallingdotseq 1} + \cos\theta_m \underbrace{\sin\frac{b_m}{N}}_{\fallingdotseq \frac{b_m}{N}}\right) = \left(m+\frac{1}{N}\right)\lambda$$

0と近似しないこと。

$$\boxed{\sin x = x} - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$$

$$\boxed{\cos x = 1} + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots$$

「1次式まで拾う」の近似の約束に反してしまう

$$\therefore d\left(\sin\theta_m + \frac{b_m}{N}\cos\theta_m\right) = \left(m+\frac{1}{N}\right)\lambda$$

使っちゃいけない文字 N がまだありますね。

$d\sin\theta_m = m\lambda$ であるから

$$\cancel{m\lambda} + \frac{d\cdot b_m}{N}\cos\theta_m = \cancel{m\lambda} + \frac{\lambda}{N}$$

$$\therefore b_m = \frac{\cancel{N}}{d}\cdot\frac{1}{\cos\theta_m}\cdot\frac{\lambda}{\cancel{N}}$$

$$= \frac{\lambda}{d\cos\theta_m} \quad \cdots (け)$$

広島あおば物理塾
(082)274-9555