1995年　京都大学第2問

次の文を読んで、$\boxed{}$に適した式または数値をそれぞれの解答欄に記入せよ。
なお$\boxed{}$はすでに$\boxed{}$で与えられたものと同じものとする。

（1）**図1**に示すように、起電力 E_0[V] の電池と抵抗値 R_0[Ω] の抵抗を直列に接続した回路がある。この回路の端子aとbの間に抵抗値 R[Ω] の抵抗を接続したとき、端子bに対する端子aの電圧 V_0[V] と、端子aを通って抵抗に流れ込む電流 I_0[A] は

$$V_0 = \frac{E_0 R}{R + R_0} \quad \cdots \quad (1)$$

$$I_0 = \frac{E_0}{R + R_0} \quad \cdots \quad (2)$$

と表せる。

次に、**図2**の回路を考える。図に示すように、電池の起電力は E_1[V] と E_2[V]、抵抗値は R_1[Ω] と R_2[Ω] である。この回路の端子cとdの間に抵抗値 R[Ω] の抵抗を接続したとき、端子dに対する端子cの電圧 V[V] と、端子cを通って抵抗に流れ込む電流 I[A] を求めると、

$$V = \frac{\boxed{\text{ア}}\,R}{R + \boxed{\text{イ}}} \quad \cdots \quad (3)$$

$$I = \frac{\boxed{\text{ア}}}{R + \boxed{\text{イ}}} \quad \cdots \quad (4)$$

と表せる。

式(1)と式(3)、式(2)と式(4)を見比べると、式(3)と式(4)では、式(1)と(2)の E_0 を$\boxed{\text{ア}}$で、R_0 を$\boxed{\text{イ}}$で置き換えた形になっていることがわかる。すなわち、端子cとdの間の電圧とそれらを流れる電流を求める場合、**図2**の回路は、電池の起電力を、$\boxed{\text{ア}}$[V]、抵抗値を$\boxed{\text{イ}}$[Ω]とした**図1**の回路に置き換えて考えてもよいことがわかる。

この置き換えは、端子cとdの間に抵抗に限らず任意の回路を接続した場合でも可能である。

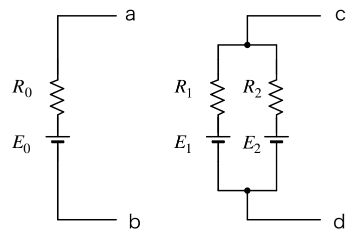


図１　　図２

(2)　回路中の電圧や電流を求める際に、上記の置き換えを用いることにより簡単に計算できる場合がある。**図3**に示す回路を考えよう。

電池の起電力は V_1[V] と V_2[V] である。この回路の端子eとfの間に何らかの回路を接続し、端子eとfの間の電圧とそれらを流れる電流を求める場合を考える。**図2**の回路から**図1**の回路への置き換えは、電池の起電力 E_1 や E_2 が 0[V] の場合にも可能であることに注意すると、**図3**の回路は、起電力$\boxed{\text{ウ}}$[V]の電池と抵抗値$\boxed{\text{エ}}$[Ω]の抵抗を直列に接続した回路に置き換えて考えてもよいことがわかる。

(3)　**図4**に示す回路を考える。電池の起電力は V_1[V]、V_2[V]、V_3[V]、V_4[V]である。この回路の端子hに対する端子gの電圧を求めると、$\boxed{\text{オ}}$[V]となる。

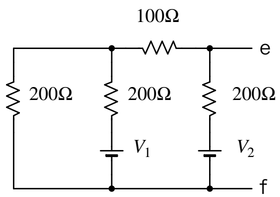


図３

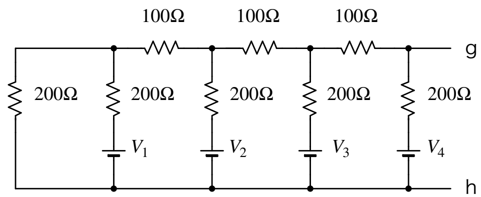


図４

(4)　**図5**はダイオードである。このダイオードの電流-電圧特性すなわち端子qに対する端子pの電圧 V[V] とダイオードを流れる電流 I[A] の関係は、

$$V < 0.6[\mathrm{V}] \text{ では} \qquad I = 0[\mathrm{A}]$$

$$V \geqq 0.6[\mathrm{V}] \text{ では} \qquad I = \frac{1}{\alpha}(V - 0.6)[\mathrm{A}]$$

で近似できるものとする。この特性を**図6**に示す。**図6**のグラフを用いると、この近似式の係数αは、$\boxed{\quad カ \quad}$ [Ω]であることがわかる。

$1\mathrm{mA} = 10^{-3}\mathrm{A}$

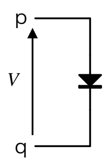


図5

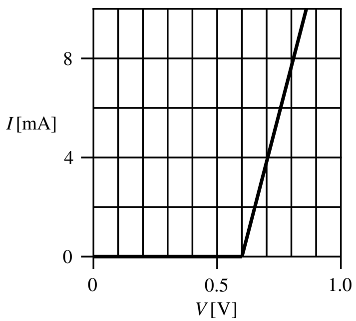
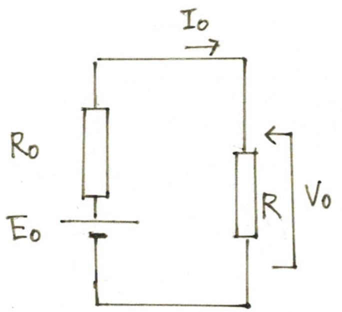


図6

(5)さて、**図4**の回路において、$V_1 = 16$[V]、$V_2 = V_3 = V_4 = 0$[V]とする。この回路の**図5**のダイオードを接続した。すなわち、端子gとp、端子hとqをつないだ。
このとき、端子hに対する端子gの電圧は$\boxed{\quad キ \quad}$[V]となる。さらに、ダイオードと並列に100[Ω]の抵抗を接続すると、端子hに対する端子gの電圧は$\boxed{\quad ク \quad}$[V]となる。

1995 京大 第2問

(1) (1)(2)式は以下のように証明できる。



キルヒホッフの法則より

$$E_0 - I_0R_0 - V_0 = 0 \quad \cdots ①$$

オームの法則より

$$V_0 = I_0R \quad \cdots ②$$

②を①に代入して

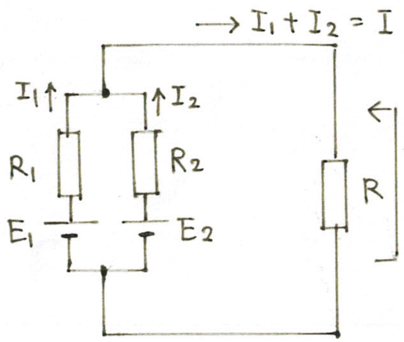
$$E_0 - I_0R_0 - I_0R = 0$$

$$I_0 = \frac{E_0}{R+R_0} \quad \cdots (2)$$

(2)を②に代入して

$$V_0 = \frac{E_0R}{R+R_0} \quad \cdots (1)$$

(ア)(イ)



キルヒホッフの法則より

$$\begin{cases} E_1 - I_1R_1 + I_2R_2 - E_2 = 0 & \cdots ④ \\ E_1 - I_1R_1 - (I_1+I_2)R = 0 & \cdots ⑤ \\ E_2 - I_2R_2 - (I_1+I_2)R = 0 & \cdots ⑥ \end{cases}$$

⑤ × R_2 + ⑥ × R_1

$$E_1R_2 - I_1R_1R_2 - (I_1+I_2)RR_2 = 0$$

$$+)\ E_2R_1 - I_2R_2R_1 - (I_1+I_2)RR_1 = 0$$

$$E_1R_2 + E_2R_1 - R_1R_2(I_1+I_2) - (I_1+I_2)R(R_1+R_2) = 0$$

$$I_1+I_2\,(=I) = \frac{E_1R_2+E_2R_1}{R_1R_2+R(R_1+R_2)}$$

$$= \frac{E_1\cdot\frac{R_2}{R_1+R_2} + E_2\frac{R_1}{R_1+R_2}}{\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+R} \quad \cdots (4)$$

置き換えにおいて (1)のE_0に相当 $\boxed{A}$

オームの法則より

$$V = IR = \frac{\boxed{\left(E_1\cdot\frac{R_2}{R_1+R_2} + E_2\cdot\frac{R_1}{R_1+R_2}\right)}R}{\boxed{\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}}+R} \quad \cdots (3)$$

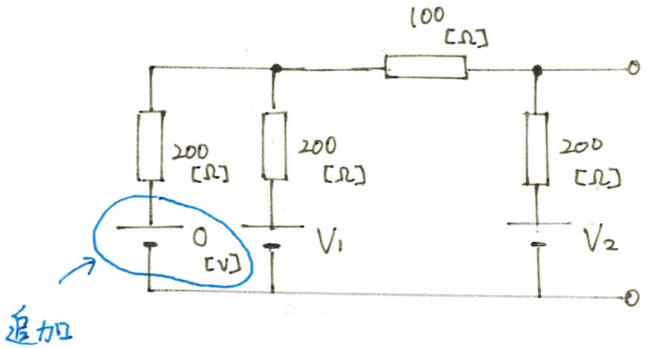
置き換えにおいて (1)のR_0に相当 $\boxed{B}$

(なお、⑤−⑥とやっても $I_1+I_2\,(=I)$ は出て来ないし、

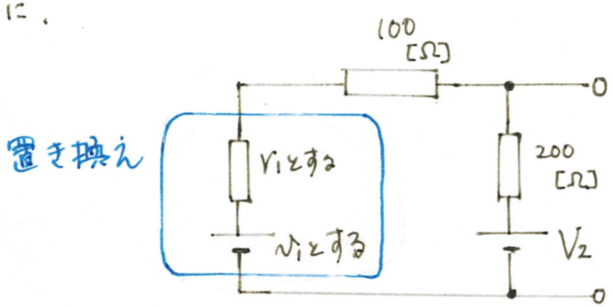
Rが消えてしまうのでうまくいかない。)

(2)　(1)の最後の文「この置き換えは、〜抵抗に限らず任意の回路を接続した場合でも可能」から、端子cdやef……に電池を含む回路を接続した場合でも可能とわかる。

(ウ)(エ)　まず、図3の回路を下図のように置き換え、



さらに、



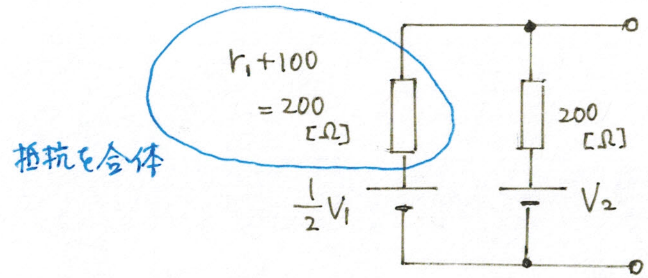
と置き換える。(1)の結果 $\boxed{B}$ より

$$r_1 = \frac{200 \cdot 200}{200 + 200} = 100 \ [\Omega]$$

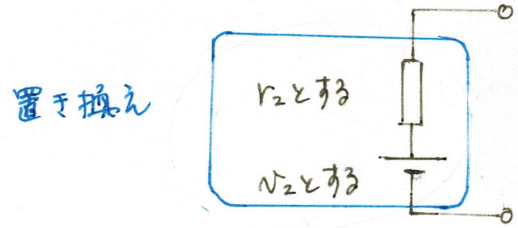
$\boxed{A}$ より

$$v_1 = 0 \cdot \frac{200}{200+200} + V_1 \cdot \frac{200}{200+200} = \frac{1}{2} V_1$$

さらに



と置き換え、



と置き換えると

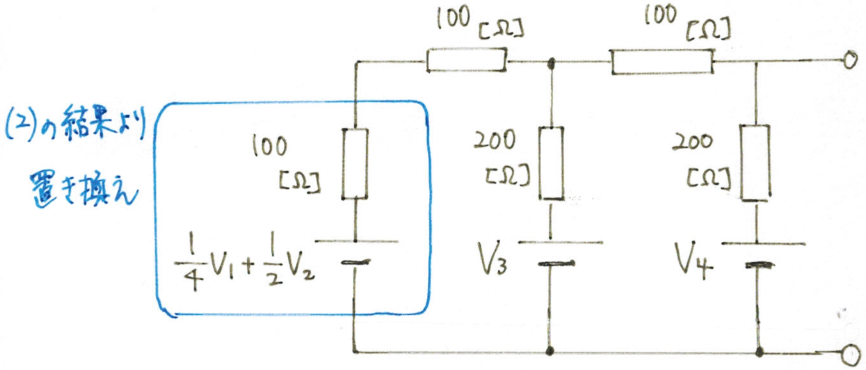
$$r_2 = \frac{200 \cdot 200}{200 + 200} = 100 \ [\Omega]$$ ← (エ)の答え

$$v_2 = \frac{1}{2} V_1 \cdot \frac{200}{200 + 200} + V_2 \cdot \frac{200}{200 + 200}$$

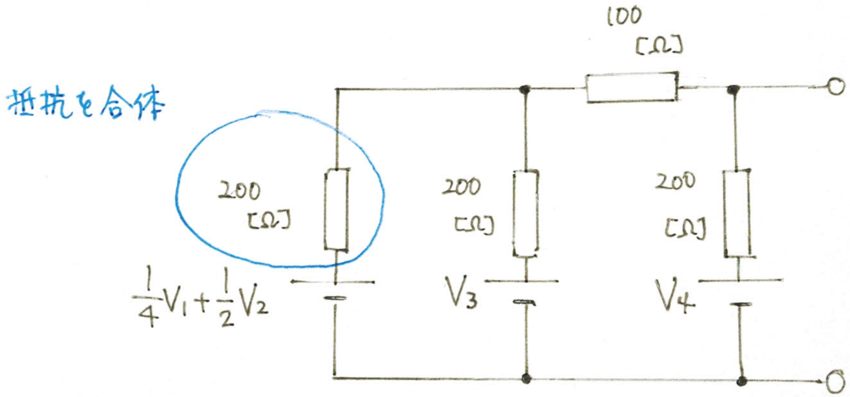
$$= \frac{1}{4} V_1 + \frac{1}{2} V_2 \ [\mathrm{V}]$$ ← (ウ)の答え

(3)(オ)

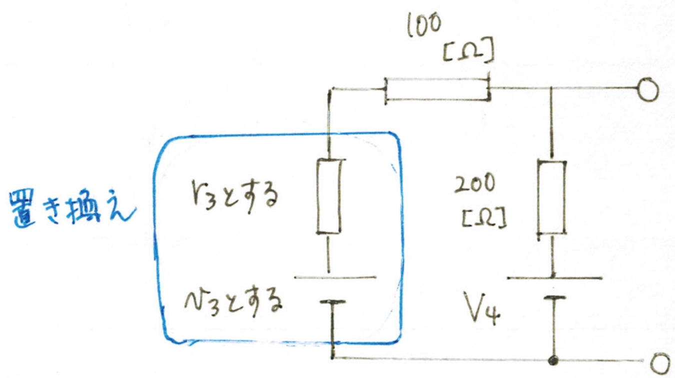
(2)の続きを考える。図4の回路は



と同等であるから、さらに



と置き換え、



と置き換える。

するど、$r_3 = \dfrac{200 \cdot 200}{200+200} = 100$ [Ω]

$$v_3 = \left(\frac{1}{4}V_1 + \frac{1}{2}V_2\right) \cdot \frac{200}{200+200} + V_3 \cdot \frac{200}{200+200}$$

$$= \frac{1}{8}V_1 + \frac{1}{4}V_2 + \frac{1}{2}V_3 \quad [\mathrm{V}]$$

さらに

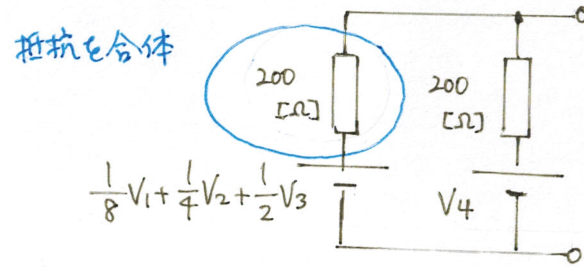
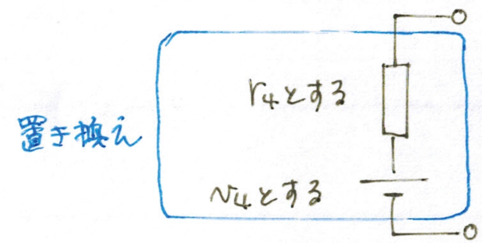


図4の回路がこんなにシンプルになった!!

と置き換え、



と置き換えると、

$$r_4 = \frac{200 \cdot 200}{200+200} = 100 \quad [\Omega]$$

$$v_4 = \left(\frac{1}{8}V_1 + \frac{1}{4}V_2 + \frac{1}{2}V_3\right)\cdot\frac{200\cdot200}{200+200} + V_4\cdot\frac{200\cdot200}{200+200}$$

$$= \frac{1}{16}V_1 + \frac{1}{8}V_2 + \frac{1}{4}V_3 + \frac{1}{2}V_4 \quad \leftarrow \text{(オ)の答え}$$

v_4

注) gとhの端子間の電圧は、今回何もつながっていないので v_4 になる。

キルヒホッフの電圧則を考えると、今回 r_4 に電流が流れていないので r_4 で電圧降下が発生せず、「gh間の電圧 $= v_4$」になる。

注) もし、gとhの間に抵抗Rをつないだときの端子間電圧は、v_4 と一致しない。

キルヒホッフの電圧則を考えると、このときは r_4 に電流が流れるので r_4 で電圧降下が発生し、「gh間の電圧 $\neq v_4$」になる。

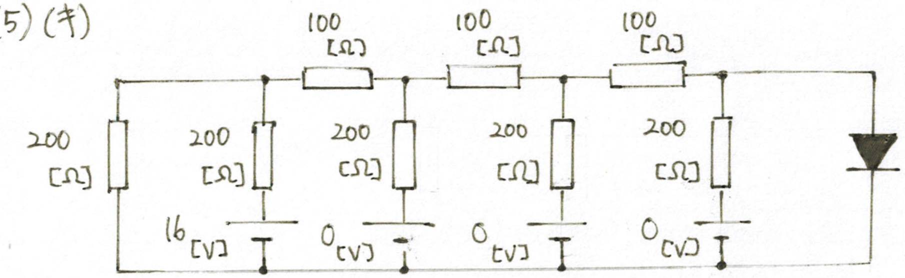
(4)(カ) 図6の適当な点を選んで

$$\frac{1}{\alpha}(0.7-0.6) = 4\times10^{-3}$$

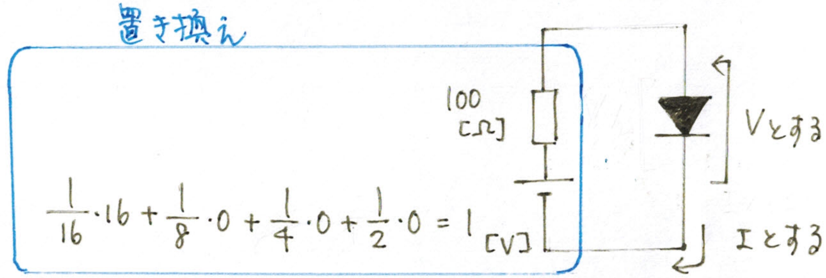
$$0.1\times\frac{1}{4}\times10^{3} = \alpha \qquad \therefore \alpha = 25 \text{ [Ω]}$$

//

(5)(キ)



は



と等価になる((3)の結果より)。

キルヒホッフの電圧則より

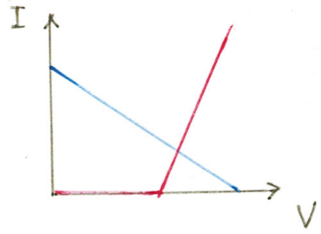
$$1 - 100I - V = 0 \quad \cdots ☆$$

(4)の結果より $I = \frac{1}{25}(V-0.6)$ であるから

$$1 - 100\cdot\frac{1}{25}(V-0.6) - V = 0$$

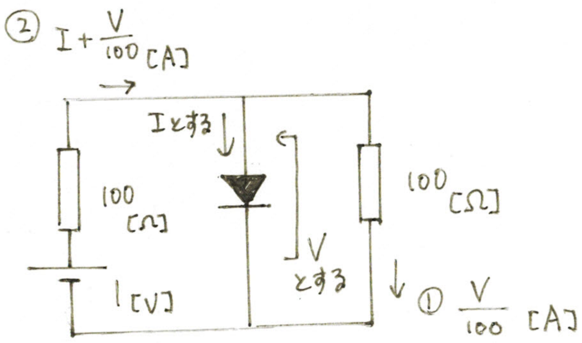
$$5V = 1.4 \qquad \therefore V = 0.68 \text{ [V]} \quad \leftarrow \text{(キ)の答え}$$

注）キルヒホッフの法則（等式）を図6に書き込み，交点を求めても
よいが，中途半端な点になり上手くいかない。



参考図

(7)

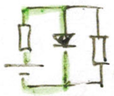


と等価となる。

① 図の右側の抵抗にかかる電圧もVであるから，図の右側の抵抗に流れる電流はオームの法則より $\frac{V}{100}$ [A]である。

② キルヒホッフの電流測により，図の左側の抵抗を流れる電流は，ダイオードに流れる電流と①の電流の和の

$I+\frac{V}{100}$ [A]である。

③ 従って  のループでキルヒホッフの電圧則を立ててみると，

$$1-100\left(I+\frac{V}{100}\right)-V=0$$

$$\therefore\ 1-100I-2V=0$$

$$I=\frac{1-2V}{100} \quad \cdots ⑦$$

④ 図6より $I \geqq 0$ （負にならない，と読み取れる）

⑦をこの不等式に代入して

$$\frac{1-2V}{100} \geqq 0 \qquad \therefore\ V \leqq 0.5 \text{ [V]} \quad \cdots ⑧$$

⑤ $V \leqq 0.5$ [V]のとき，図6より $I=0$ であるから

⑦より

$$0=\frac{1-2V}{100}$$

⑧（再掲）

$$V \leqq 0.5$$

これを満たすのは $V=0.5$ [V]のみ.

0.5 [V]

以上.