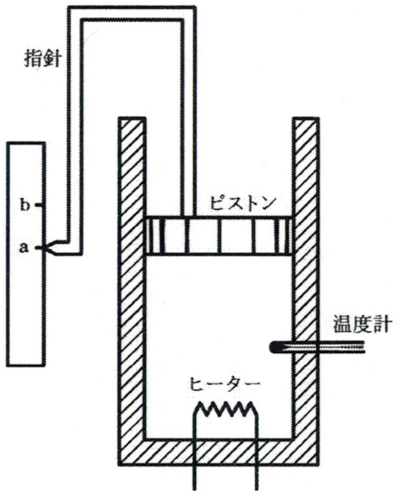
京大 1990年度 第3問

次の文を読んで、□に適した式を、(　　　)に適した数値を、また{　　　}の中の正しいものの記号を、それぞれの解答欄に記入せよ。ただし、数値は有効数字2けたで解答せよ。



気体	C_P/R
A	4.0
B	3.5
C	2.5

図に示すような、内側にヒーター及び温度計が取り付けられた断熱容器がある。鉛直方向に滑らかに動く断熱されたピストンによって、ある気体が容器内に密閉されている。ピストンには質量の無視できる指針が取り付けられており、それにより、ピストンの下面の位置を知ることができる。容器内の気体の温度は一様であり、ヒーター及び温度計の体積と熱容量は無視できるものとする。大気の圧力はp_0 [N/m^2]、ピストンの質量およびその下面の面積はそれぞれ、m [kg]およびS [m^2]である。重力加速度をg [m/s^2]、気体定数をR [J/(mol･K)]、気体の定圧モル比熱をC_p [J/(mol･K)]、定積(定容)モル比熱をC_v [J/(mol･K)]とする。容器に入っている気体は、C_p/Rが表で与えられる理想気体A、B、Cのいずれかである。

以下のような順序で、気体に対して2種類の操作を施し、あわせて気体の温度およびピストンの位置に関する測定を行った。

測定1：最初、図のようにピストンの下面が、容器底面よりL [m]上方のaの位置にある状態において温度を測定したところ、T_1 [K]であった。

操作1：ヒーターに電流を流して発生したジュール熱により気体を加熱した。しばらくして電流を切った。

測定2：気体の温度を測定したところ、T_2 [K]であった。このとき、ピストンの下面はaより上方のbの位置にあった。

操作2：ピストンに下向きの力をくわえ、ピストンの下面をもとの位置aにゆっくりもどした。

測定3：気体の温度を測定したところ、T_3 [K]であった。

密閉されている気体のモル数は[イ]であり、ab間の距離は[ロ][m]となる。したがって、操作1の間に気体が外部に対して行った仕事は[ハ][J]である。

次にC_pとC_vとの比C_p/C_vをγとし、理想気体ではC_pとC_vの差(C_p-C_v)が[ニ][J/(mol･K)]に等しいことを考慮すれば、表に示された3種類の気体A、B、Cのγの値はそれぞれ、(ホ)、(ヘ)、(ト)となる。一方、操作2の間の変化は断熱変化とみなすことができる。このとき、圧力と体積の間には

$$(\text{圧力}) \times (\text{体積})^{\gamma} = \text{一定}$$

という関係式が成立する。これを温度と体積の間の関係式

$$(\text{温度}) \times (\text{体積})^{\boxed{チ}} = \text{一定}$$

に書き換え、操作2の間の変化に適用してみよう。測定2のとき、体積は[リ][m^3]、測定3のとき体積は$L \cdot S$ [m^3]であることを考慮すれば、T_3はT_1、T_2、γを用いて[ヌ]のように表される。

いま、$T_2 = 1.050\,T_1$、$T_3 = 1.020\,T_1$ の場合を考えよう。一般に$(1+\alpha)^\beta$は、αおよびα･βの絶対値が1に比べて十分小さいとき、近似的に$1+\alpha\cdot\beta$と表される。これを使ってγを求めれば、密閉されている気体は、{ル：① A　② B　③ C}であることがわかる。

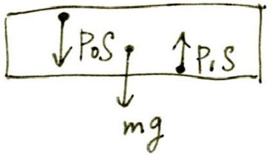
京大 1990 第3問

まず、問題をザッと見て、「ピストンに入っている気体がA,B,Cのどれかであるか調べる実験」であることを確認する(最後の文章に書いてある)。このとき、見かけの難易度は気にしなくてよいです。

自分は易しい問題の方が緊張します

(イ)(ロ) 測定1のときの、ピストンについての力のつり合いは、

このときの圧力をP_1として



$$P_0S + mg - P_1S = 0$$

$$P_1 = P_0 + \frac{mg}{S}$$

従って測定1のときの状態方程式は

$$\left(P_0 + \frac{mg}{S}\right) SL = nRT_1 \quad \cdots ①$$

ここまではセンターでもよく出るので、覚えるか、手が勝手に動くようにしておいて下さい。

測定2のときも、ピストンの外側の気圧は大気圧P_0で変化がない。従って状態方程式は、ab間の距離をxとして

$$\left(P_0 + \frac{mg}{S}\right) S(L+x) = nRT_2 \quad \cdots ②$$

①,②をn,xについての連立方程式とみて解くと

$$n = \frac{\left(P_0 + \frac{mg}{S}\right) SL}{RT_1} \quad \cdots ③$$

これをイの答えとしても正解。「どっちが人に読みやすく美しいか?」です。

$$= \frac{(P_0S + mg)L}{RT_1} \quad \cdots イ$$

③を②に代入して

$$(\quad)\cancel{S}(L+x) = \frac{(\quad)\cancel{S}L}{\cancel{R}T_1} \cdot \cancel{R}T_2$$

$$L + x = L\frac{T_2}{T_1}$$

$$x = L\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) \quad \cdots ロ$$

(ハ) 操作1では、気体がピストンに加える力は一定。

従って求める仕事は

$$P_1S \cdot x \ (= P_1 \underbrace{\Delta V}_{\text{測定2の体積}}) = \left(P_0 + \frac{mg}{S}\right) L\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) \quad \cdots ハ$$

(ニ) R … ニ

暗記から出す人も多いかも

Cp と Cv と R の関係を忘れてしまったら，モル比熱の定義

$$Q = nC\Delta T \quad から \quad \Delta T = \frac{Q}{nC}$$

を書き，「同じ熱量を与えても，定圧変化は定積変化に比べて余分に仕事をする分温度が上がらないこと」を使う。

すると大体

$$\frac{1}{Cp} < \frac{1}{Cv}$$

となり $Cp > Cv$

を得る。あとは，おぼろげな記憶と合わせて

$$Cp = Cv + R \quad とする。$$

(ホ)(ヘ)(ト)

$$\gamma = \frac{Cp}{Cv} = \frac{Cp}{Cp-R} = \frac{\frac{Cp}{R}}{\frac{Cp}{R}-1}$$

これに表の値を代入すると

有効数字2ケタの指示に注意

$$A \cdots \frac{4.0}{4.0-1} \fallingdotseq 1.3$$

$$B \cdots \frac{3.5}{3.5-1} \fallingdotseq 1.4$$

$$C \cdots \frac{2.5}{2.5-1} \fallingdotseq 1.7$$

γ は比熱比と呼ばれている。

検索すると 25°C で

気体	γ
He	1.66
O_2	1.40
CO_2	1.29
NH_3	1.31

らしい。

(チ) ボイル・シャルルの法則より

$$\frac{pV}{T} (= nR) = 一定 \quad \cdots ①$$

断熱変化より

$$pV^{\gamma} = 一定 \quad \cdots ②$$

結構有名な式

$\frac{②}{①}$ を作ると $TV^{\gamma-1} = 一定$ … チ

(リ)(ヌ)「$TV^{\gamma-1}=$一定」を測定2と測定3の間で使いたいので、まずそれぞれの体積を求めている。

測定2のときの体積は(ロ)の結果より

$$S(L+x)=S\left\{L+\left(\frac{T_2}{T_1}-1\right)L\right\}=\frac{T_2}{T_1}SL \quad \cdots リ$$

測定3の体積は題意より SL

$$\therefore\ T_2\left(\frac{T_2}{T_1}SL\right)^{\gamma-1}=T_3(SL)^{\gamma-1} \quad (=一定)$$

$$\therefore\ T_3=T_2\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\gamma-1} \quad \cdots ヌ$$

(ル) (ヌ)の結果に $T_3=1.02T_2$, $T_2=1.05T_1$ を代入すると

$$1.02T_2=T_2\cdot(1.05)^{\gamma-1}$$

$$\therefore\ 1.02=(1+0.05)^{\gamma-1}$$

$$\fallingdotseq 1+(\gamma-1)\cdot 0.05$$

$$\therefore\ \gamma-1=\frac{0.02}{0.05}=\frac{2}{5}$$

(ハ)の結果より

$$\therefore\ \gamma=\frac{7}{5}=1.4$$

∴ ②が答え …ル

2原子分子ですね。

つづく