京大　1989年第2問

次の文を読んで、$\boxed{}$に適した式または数値をそれぞれの解答欄に記入せよ。

断面積 S [m^2]、長さ D [m]の一様な金属棒の両端間に電圧 V [V]がかけられていて、電流が流れている。この金属内部の電子の運動について考える。以下では、電子の質量を m [kg]、電荷を $-e$ [C]とし、体積 1m^3 あたりの電子の数を N とする。

(1) 電子は勝手な方向にいろいろな速さで動いているが、電子全体について平均した速度は、電界に平行である。そこで、電子の速度の電界方向の成分を v [m/s]とし、その平均値を $\bar{v}$ [m/s]と表すことにする。ただし、電界と逆向きを正とする。そうすると、上の金属棒を流れる電流の大きさは $\boxed{イ}$ [A]となる。

オームの法則に従うと、電流は電圧に比例する。一方、電界の中で電子は加速される。その加速度の大きさは $\boxed{ロ}$ [m/s^2]である。したがって、電界の作用だけでは電流は時間とともに増加しつづけ、オームの法則が成立しない。

(2) 金属の内部で、電子は、イオン配列の乱れや不純物など、いろいろな障害物との衝突を繰り返している。一般には、衝突から次の衝突までの間に電子が走る距離は一定していない。そこで、この衝突の間に電子が走る距離を電子全体について平均したものを L [m]とする。いま、衝突直後の電子の電界方向の速度成分を v_0 [m/s]で表す。ただし、電界と逆向きを正とする。衝突から次の衝突までの間、電子は電界の作用だけを受けて運動するものと考えると、ある衝突から時間 t [s]後の、電子の電界方向の速度成分 v [m/s]は、
$v = v_0 + \boxed{ハ}$ となる。ただし、まだ次の衝突は起こっていないとする。

(3) まず、電界がないとき、電子は静止していると仮定してみる。すると、電界があるとき、電子は電界で加速され、衝突で静止し、また電界で加速されるという過程を繰り返していることになる。したがって、$v_0 = 0$ である。簡単のために、電子は、常に、衝突から次の衝突までの間に一定の距離を動くとする。そして、その距離を衝突間平均移動距離 L [m]に等しいとおく。そうすると、衝突から次の衝突までに要する時間は $\boxed{ニ}$ [s]である。電子の平均速度を求めると、その大きさは $\boxed{ホ}$ [m/s]となる。衝突の間の平均移動距離 L[m]は障害物の分布で決まる量であり、電界の強さには関係しないと思われる。したがって、電流は電圧の $\boxed{ヘ}$ 乗に比例することになる。

(4) 次に、仮定を変えて、電子は非常に大きな速度で金属の内部を飛び回っているとする。電子が走っている速さ(速度の絶対値)の平均値を $\bar{u}$ [m/s]とすると、$L = \bar{u}T$ によって決められる時間 T [s]は、衝突から次の衝突までの時間の平均値と見なせる。電子の速度は電界の作用によって時間とともに変化するが、そのような速度の変化量は電子が作用していないときの電子の平均の速さと比べて十分に小さいものとする。そうすると、電界があるときもないときも $\bar{u}$ の値は同じと見なして衝突から次の衝突までの平均時間 T [s]を求めることができ、T の値は電界に無関係となる。

簡単のために、電子は、常に、衝突から決まった時間の後に次の衝突をするとし、この衝突間の時間を衝突間平均移動時間 T [s]に等しいとおく。衝突直後の電子の電界方向の速度成分 v_0 [m/s]の値は正のことも負のこともあって、v_0 の平均値を $\bar{v}_0$ で表すと、$\bar{v}_0 = 0$ が成り立つ。したがって、平均すれば、電子が衝突から時間 T [s]の間に動く距離は、$\boxed{ト}$ [m]となる。この場合には、電流は電圧に比例する。以上の考察から、オームの法則がしている場合には、金属の内部では電子が大きな運動のエネルギーを持っているものと推測される。

(5) 電子の運動エネルギーは熱エネルギーであると考えてみる。いま、絶対温度を Θ [K]とし、エネルギー等分配則を仮定すると、ボルツマン定数を k [J/K]として、電子1個あたりの平均の運動エネルギーは $\boxed{リ}$ [J]に等しい。そうすると、金属の比熱のうちで電子による寄与は温度の $\boxed{ヌ}$ 乗に比例することになる。この結果は観測事実に反する。したがって、金属内部で電子が持っている運動エネルギーは熱エネルギーではない。

1989 京大 第2問

(1) 「$I = vSne$」より $I = \bar{v}SNe$ …イ
アイ アム ブスネー

電子の運動方程式は、電子の加速度をaとして

$$ma = e\frac{V}{D}$$ ←「$F = qE$」「$V = Ed$」を組み合わせた

$$\therefore a = \frac{eV}{mD} \quad \cdots ロ$$

問題文にあるように、このままではオームの法則が成立しないため、加速を止めるように何らかのモデルを作る必要がある。

(本問では(3)(4)の2つのモデルを作っている)

(2) (3)(4)のモデル共通で使用する式

$$v = v_0 + at$$

$$= v_0 + \frac{eV}{mD}t \quad \cdots ハ$$

を作る。

(3) 平均自由行程 L = 一定で、かつ $v_0 = 0$ のモデルを作ってみる。

オームの法則との関連が知りたい

→ I と V の関係が知りたい

→ $\bar{v}$ と V の関係が知りたい　イの結果

$\bar{v}$: 十分長い時間で平均した電子の速さ

$\bar{v}$を求めるため、ホまでの誘導に乗る。衝突から次の衝突までの時間をt_0(二の答え)とすると

$$L = \underbrace{v_0}_{\text{仮定よりゼロ}} t_0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{eV}{mD}t_0^2 \quad (\because ハの結果)$$

$$\therefore t_0 = \sqrt{\frac{2mDL}{eV}} \quad \cdots 二$$

従って、十分長い時間で平均した電子の速さ$\bar{v}$は キハジ より

$$\bar{v} = \frac{L}{t_0} = \frac{L}{\sqrt{\frac{2mDL}{eV}}} = \sqrt{\frac{eVL}{2mD}} \quad \cdots ホ$$

$\bar{v}$ と V の関係がわかったので、I と V の関係を調べる。

$$I = \bar{v} Sne = \sqrt{\frac{eVL}{2mD}} \cdot Sne$$

となり、I は V の $\frac{1}{2}$ 乗に比例 … へ

元々のランダムな速度のこと

オームの法則と矛盾し、このモデルは失敗に終わる。

「電子が加速されても T が大して変わらない」とみなせる程、速度が大きいとする

(4)「衝突から次の衝突までの時間 T (平均自由時間) = 一定」

かつ、「十分長い時間で平均した v_0 を $\bar{v}_0$ とすると、$\bar{v}_0 = 0$」

のモデルを考えてみる。

$\bar{v}$ は十分長い時間で平均した「$v_0 + at$」 混乱せぬよう…

問題文(4)第3文は

$$\frac{(v_0 + aT) - v_0}{v_0} \ll 1$$

を言っているが、(4)第2段落第1文より T = 一定が読みとれれば、解き進めることができる。

(3)と同様に誘導に乗って $\bar{v}$ と V の関係を調べる。

$$衝突から次の衝突までのキョリ = v_0 T + \frac{1}{2} a T^2$$

$$\fallingdotseq \underbrace{\bar{v}_0}_{=0} T + \frac{1}{2}\frac{eV}{mD} T^2$$

(十分長い時間で平均すれば)

$$= \frac{1}{2}\frac{eV}{mD} T^2 \quad \cdots ト$$

キ / リジ より

$$\bar{v} = \frac{\frac{1}{2}\frac{eV}{mD}T^2}{T} = \frac{1}{2}\frac{eV}{mD} T \quad \cdots チ$$

I と V の関係を調べると

$$I = \bar{v} Sne = \frac{1}{2}\frac{eV}{mD} T \cdot ne$$

となり、V の 1 乗に比例、オームの法則を再現できた!!

(5) … がしかし、問題が残る。

(4)の仮定は、「電子が電場により加速されても、V によらず T が一定と見なせる程、v_0 が大きい」としたことになる。

十分長い時間で平均する前

すると、イオンの乱雑な振動の運動エネルギーよりも、電子の乱雑な方向の運動エネルギーの方が圧倒的に大きいことが予想される。言い替えれば、導体の熱力学的な内部エネルギーのほとんどは電子が担っていると、(イ)のモデルからは予想される。

単原子分子の内部エネルギーの公式と同じ

電子の温度を θ (シータ) とすれば

$$\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} k \theta \quad \cdots \text{リ}$$

導体の比熱を C とすると、

$$\text{内部エネルギーの増加} = m_{\text{導体}} C \Delta\theta$$

である。この導体の電子の個数は n だったから

$$\frac{3}{2} nk(\theta + \Delta\theta) - \frac{3}{2} nk\theta$$

$$= m_{\text{導体}} \cdot C \cdot \Delta\theta$$

$$\therefore \frac{3}{2} nk\Delta\theta = m_{\text{導体}} \cdot C \cdot \Delta\theta$$

$$\therefore C = \frac{3}{2} \frac{nk}{m_{\text{導体}}}$$ となる。

つまり C は温度 θ に依存しない（0乗に比例）…ヌ

ことが予言される。

ところが実際測ってみると C は θ に比例していた。

ここで(イ)のモデルは失敗する。

- - - - - - - - -

解決するには量子力学の登場を待たなければならなかった。

電子に許される運動エネルギーは（物質の種類によるが）、とびとびの値で決まっており、それ以外の値をとることが出来ない。しかも、そのとびとびの値に入れる電子の数は2コ（スピンの↑↓があるので）と決まっている。

そのとびとびの値にエネルギーの低い順から電子が全て埋まっている状態が、（電子の）絶対零度になっている。

絶対零度だからといって、運動エネルギーが零ではないことが知られている。

以上