京大　1988年第2問

次の文(A)、(B)を読んで、$\boxed{\quad}$に適した式または語句をそれぞれの解答欄に記入せよ。

(A)図1に示すような端子X、端子Yを備え、電池を持ったスイッチ箱がある。

X端子はa、b、c、dのうち必ずいずれかの接点に接続し、これらの切り替えは瞬時に行われる。a点とY端子とは接続されていない。b点とY端子間、c点とY端子間には内部抵抗を無視できる起電力E[V]の電池が図1のように極性を互いに逆にして、それぞれ接続されている。d点とY端子間は導線で接続されている。
このようなスイッチ箱SW_1、SW_2、SW_3、抵抗R_1[Ω]、R_2[Ω]、およびコンデンサーC_1[F]、C_2[F]を図2のように導線で接続した回路について考えてみよう。

ただし、端子や接点の接触抵抗、および導線の抵抗は無視できるものとする。

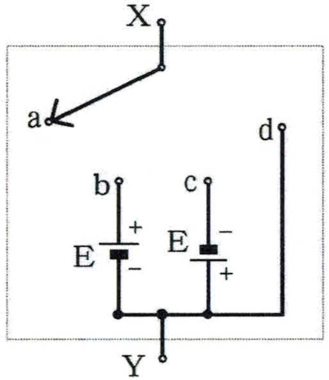


図1

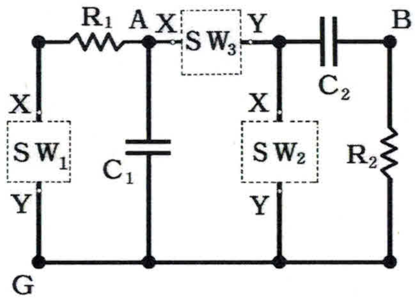


図2

① 最初、コンデンサーC_1、C_2に電荷がなく、SW_1、SW_2、SW_3はすべてX→aとなっている。まず、SW_1をX→aからX→bに切り替えた後、充分に長い時間がたつと、G点に対するA点の電位は$\boxed{\text{イ}}$[V]となる。この状態において、コンデンサーC_1に蓄えられている電荷は$\boxed{\text{ロ}}$[C]である。

次にSW_1を再びX→aに戻す。この状態で今度はSW_3をX→aからX→dに切り替えた後、充分に時間がたつと、コンデンサーC_2には$\boxed{\text{ハ}}$[C]の電荷が蓄えられ、G点に対するA点の電位は$\boxed{\text{ニ}}$[V]となる。

② ①と同様に、最初、コンデンサーC_1、C_2に電荷がなく、SW_1、SW_2、SW_3はすべてX→aとなっている。まず、SW_1をX→aからX→bに切り替える。次にSW_2をX→aからX→cに切り替えた後、充分に時間がたつと、G点に対するB点の電位は$\boxed{\text{ホ}}$[V]となる。

その後、SW_1、SW_2の両方ともX→aに戻す(この状態をT_1とする)。

次にSW_3をX→aからX→dに切り替えた後、充分に時間がたつと、G点に対するA点の電位は$\boxed{\text{ヘ}}$[V]となる(この状態をT_2とする)。
状態T_1から状態T_2に至るまでに抵抗R_2で消費されたエネルギーは$\boxed{\text{ト}}$[V]である。

(B)特性が同じ半導体ダイオードD_1、D_2、前問(A)で使用したものと同じスイッチ箱SW_1、SW_2、内部抵抗を無視できる起電力E_0[V]の電池、及び抵抗R[Ω]を含む図3、図5のような回路がある。

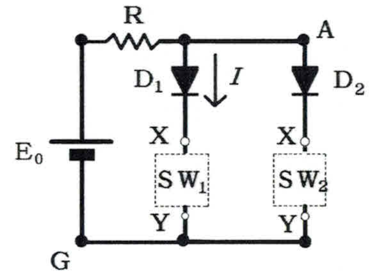
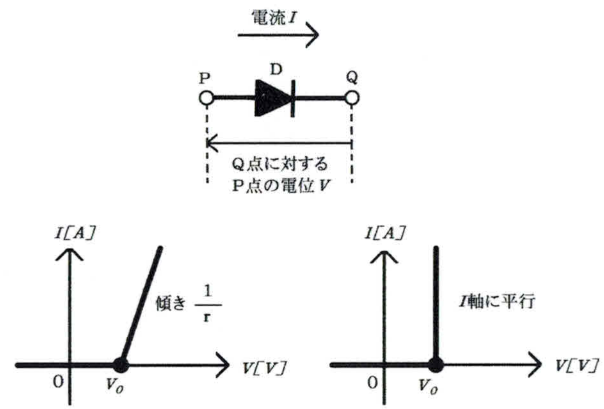


図3

① 図3のような回路について考えよう。ダイオードD_1、D_2はいずれも図4(a)のような電圧-電流特性をもつものとする。すなわち、Q点に対するP点の電位VがV_0より大きいとき、ダイオードDを通ってP点からQ点へ電流Iが流れ、VがV_0以下のとき、電流は流れない。そして図4(a)のように、$V>V_0$のとき、IとVの関係が傾き $1/r$ ($r>0$)の直線で表される。

最初、SW_1がX→b、SW_2がX→aとなっている。このときダイオードD_1を図3に示した向きに電流I ($I>0$)が流れるための条件は$\boxed{\text{チ}}$であり、そのときの電流Iの大きさは$\boxed{\text{リ}}$[A]である。また、そのときのG点に対するA点の電位は$\boxed{\text{ヌ}}$[V]となる。



(a)　(b)

図4

② また、図3の回路で、ダイオードD_1、D_2の電圧－電流特性が図4(b)の場合を考えてみよう。①と同様に、SW_1がX→b、SW_2がX→aのとなっていて、図3に示した向きに電流I($I>0$)が流れているとき、G点に対するA点の電位は$\boxed{\text{ル}}$[V]となる。この状態でSW_2をX→aからX→bに切り替えると、G点に対するA点の電位は$\boxed{\text{ヲ}}$[V]となる。さらに、SW_2をX→bからX→dに切り替えると、G点に対するA点の電

位は　ワ　[V]となる。

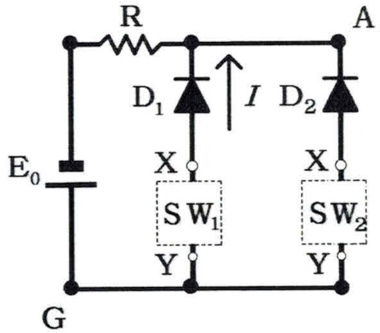


図5

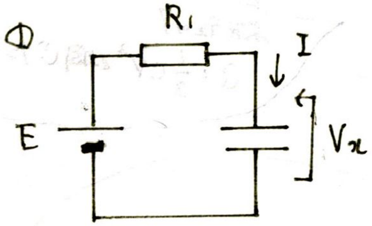
③ 図5の回路について考えてみよう。ダイオードD_1、D_2はいずれも図4(a)の電圧－電流特性をもつものとする。最初SW_1が$X \to b$、SW_2が$X \to a$のとなっていて、ダイオードD_1を図5に示した向きに電流I($I>0$)が流れているとき、この電流Iの大きさは　カ　[A]であり、G点に対するA点の電位は　ヨ　[V]となる。

④ また、図5の回路で、ダイオードD_1、D_2はいずれも図4(b)の電圧－電流特性をもつものについて考えてみよう。③と同様に、SW_1が$X \to b$、SW_2が$X \to a$のとなっていて、図5に示した向きに電流I($I>0$)が流れているとき、G点に対するA点の電位は　タ　[V]となる(このときの状態をT_3とする)。

次に、SW_1、SW_2のそれぞれが$X \to b$か$X \to d$の接続状態しかとらない場合を考えてみよう。この場合、SW_1とSW_2の接続状態を適当に組み合わせることによって、G点に対するA点の電位を、状態T_3におけるG点に対するA点の電位と同じにすることができる。このSW_1とSW_2の接続状態のすべての組み合わせを列挙すると　レ　となる。ただし、図5の回路においては、常に、 $Eo>E>Vo$ が成立しているものとする。

京大 1988 第2問

(A) ①

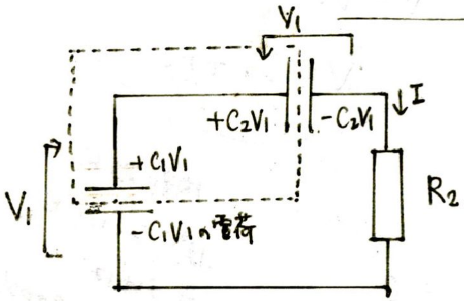


求める電圧を V_x とすると，キルヒホッフの法則より

$$E - \underbrace{IR_1}_{=0} - V_x = 0 \quad \cdots (*)$$

$$\therefore V_x = E \quad \cdots イ$$

「$Q = CV$」より　C_1E　… ロ



(*)と同様に考えると，2つのコンデンサーにかかる電圧は同じ。これを V_1 とする。

キルヒホッフの法則より

$V_1 - V_1 - \underbrace{IR_2}_{=0} = 0$

確かに!!

電荷保存則を [ ] の部分に適用すると

$$C_1V_1 + C_2V_1 = C_1E$$

ロの答え

Q_1 と書かずに，いきなり C_1V_1 と書くのが，少し計算が早い。

次元は電圧だわ! 確認

$$\therefore V_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2}E \quad \cdots ニ$$

次元も 容量×電圧に なってるネ! 確認!

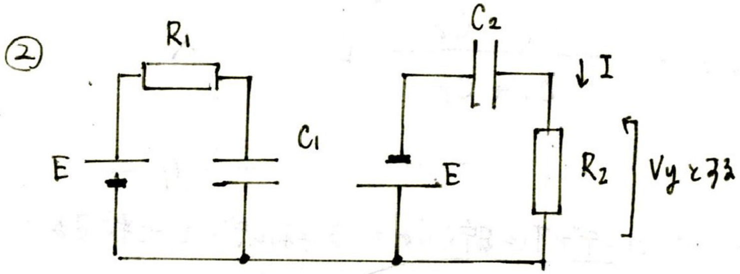
と，ニが先にわかり，C_2 に貯えられている電荷 Q_2 は

$$Q_2 = C_2V_1 = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}E \quad \cdots ハ$$

尚，(*)のキルヒホッフの法則と，電荷保存則を連立させて解くのがコンデンサを含む直流回路の問題の一般的な解き方ではあります。

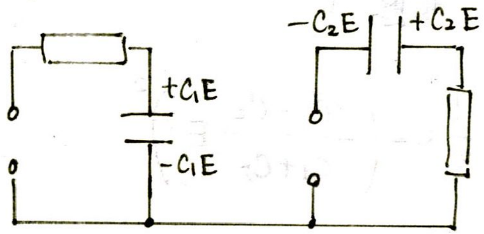
(変数を選び直すのがめんどくさいので，ハ・ニはちょっとサボっています)

②



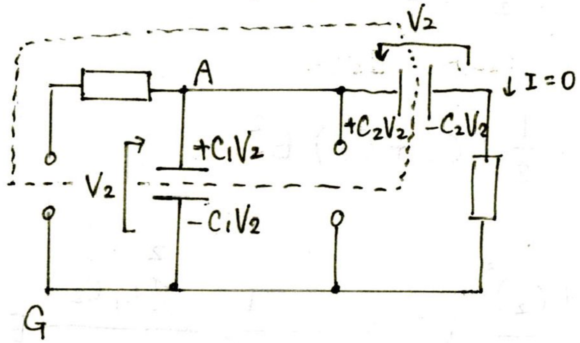
定常状態では $I = 0$　∴ $V_y = IR = 0$ … ホ

⇓ こうして



状態 T_1

⇓ こうした



状態 T_2

キルヒホッフの法則より

$V_2 - V_2 - \underbrace{IR_2}_{0} = 0$ 確かに!!

[1] C_1 にかかっている電圧を V_2 とすると，回路のつながり方から C_2 にかかっている電圧も V_2 とわかる。

[2] ⬚ の部分の電荷保存より

$$\underbrace{C_1V_2 + C_2V_2}_{\text{状態 } T_2} = \underbrace{C_1E - C_2E}_{\text{状態 } T_1}$$

次元チェック $\frac{C_1-C_2}{C_1+C_2}$ は無次元だね!

$$\therefore V_2 = \frac{C_1-C_2}{C_1+C_2}E \quad \cdots \text{ヘ}$$

(ト) 状態T_1と状態T_2で，コンデンサに貯えられているエネルギーを比較することにより，

実は誘導されていた

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2}C_1V_2^2 + \frac{1}{2}C_2V_2^2\right)}_{\text{状態 } T_2} - \underbrace{\left(\frac{1}{2}C_1E^2 + \frac{1}{2}C_2E^2\right)}_{\text{状態 } T_1}$$

$$= \frac{1}{2}C_1\cdot\left(\frac{C_1-C_2}{C_1+C_2}E\right)^2 + \frac{1}{2}C_2\left(\frac{C_1-C_2}{C_1+C_2}E\right)^2$$

$$- \frac{1}{2}C_1E^2 - \frac{1}{2}C_2E^2$$

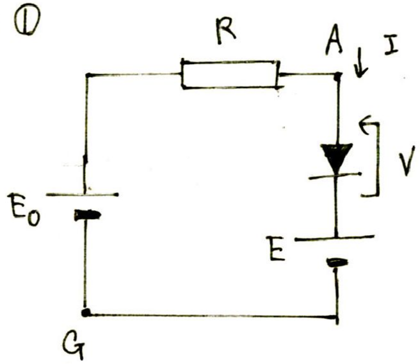
$$= \frac{1}{2}\frac{(C_1-C_2)^2}{C_1+C_2}E^2 - \frac{1}{2}(C_1+C_2)E^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(C_1-C_2)^2-(C_1+C_2)^2}{C_1+C_2}E^2 = \underbrace{-\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\overset{2}{\cancel{4}}C_1C_2}{C_1+C_2}E^2}_{\text{これが熱となって出ていったエネルギー}}$$

A. $\frac{2C_1C_2}{C_1+C_2}E^2$ … (ト)

次元チェック $Q=\frac{1}{2}CV^2$ と同じだね!

(B) ①



グランドの略と思われる

ダイオードについて

$V_0 < V$ のとき グラフ(a)から

$$I = \frac{1}{r}(V-V_0)$$

Vについて解いて

$$V - V_0 = rI$$

$$V = V_0 + rI$$

内部抵抗っぽくない?と気づけば very good

キルヒホッフの法則より

$$E_0 - IR - (V_0 + rI) - E = 0$$

$$\therefore I = \frac{E_0 - V_0 - E}{R+r} \quad \cdots \text{リ}$$

次元チェック $I = \frac{V}{R}$ と同じだね!

$I > 0$ であるためには，$R+r$ は常に正なので

$$E_0 - V_0 - E > 0 \quad \cdots \text{チ}$$

このとき、Gに対するAの電位は、キルヒホッフの法則より

$$E_0 - IR \quad (= E + V \text{ でもある})$$

$$= E_0 - \frac{E_0 - V_0 - E}{R + r} R \quad (\because \text{リの結果})$$

$$= \frac{rE_0 + (V_0 + E)R}{R + r} \quad \cdots \text{ヌ}$$

次元チェック！
電圧になってますね！

② 図4(a)のダイオードを，図4(b)の特性を持つ理想的な素子（ダイオードと言うのか？）と内部抵抗rに分けて考えている。

傾きが∞になる

図4(b)の話をするには，$r \to 0$の極限をとればよく，

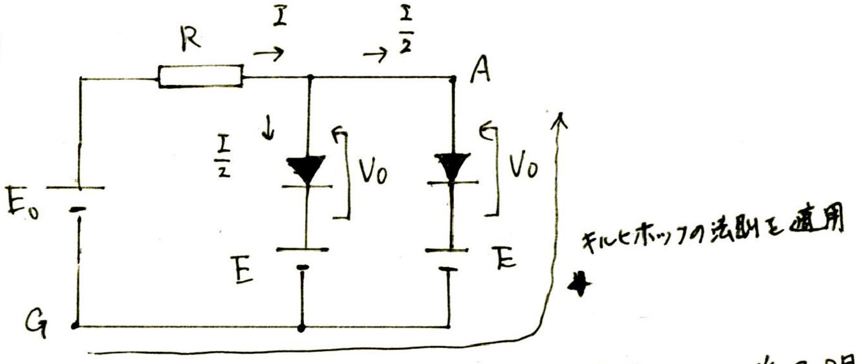
(ル)は(ヌ)より

$$\lim_{r \to 0} \frac{rE_0 + R(E + V_0)}{R + r} = \frac{R(E + V_0)}{R}$$

$$= E + V_0 \quad \cdots \text{ル}$$

尚，抵抗Rが存在するため回路に無限に電流が流れるわけではない。

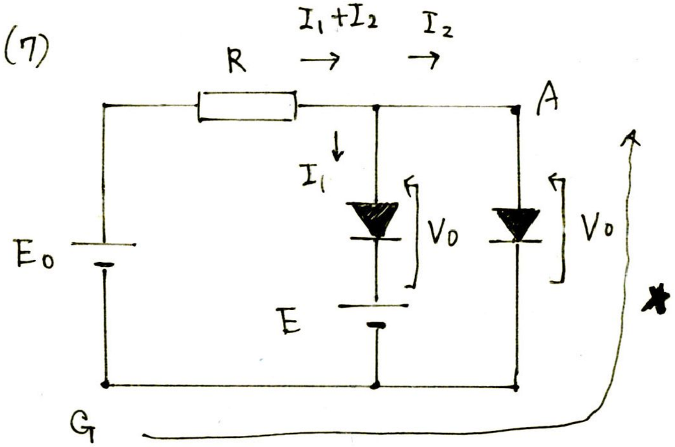
(ヲ)



電流が流れている以上，図4(b)よりダイオードの端子間電圧はV_0となる。例えば，★の通り道においてキルヒホッフの法則を適用すると，Gに対するAの電位は

$$E + V_0 \quad \cdots \quad (\text{ヲ})$$

(ワ)

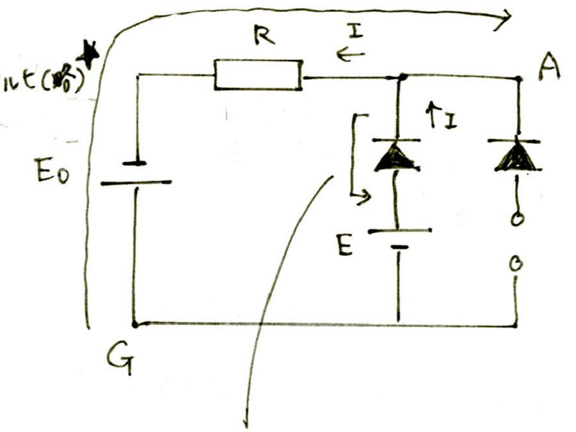


I_1，I_2は今のところ未知である。しかし，★の経路でGに対するAの電位がわかる。

$$V_0 \quad \cdots \quad (\text{ワ})$$

③ ダイオードが図4(a)のものに戻っている。①と比べて目新しいところはないが、

Iの符号に注意。



$V = V_0 + rI$ (∵ 図4(a))

(カ) キルヒホッフの法則より

$$-E_0 + IR + (V_0 + rI) - E = 0$$

$$I(R+r) = E_0 - V_0 + E$$

次元チェック!

$$\therefore I = \frac{E_0 - V_0 + E}{R+r} \quad \cdots カ$$

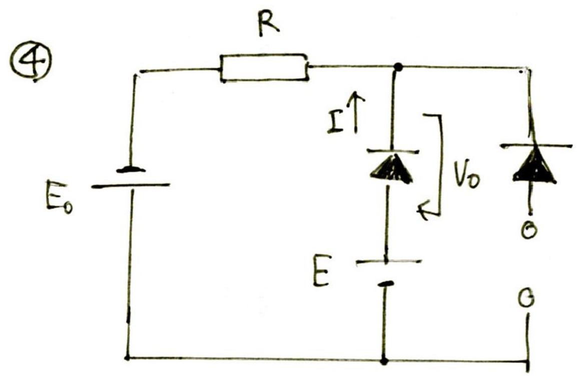
(ヨ) Gに対するAの電位は★のルートをたどって

$$-E_0 + IR = -E_0 + \frac{E_0 - V_0 + E}{R+r}R \quad (\because カ)$$

$$= \frac{-(\cancel{R}+r)E_0 + \cancel{RE_0} - V_0R + ER}{R+r}$$

$$= \frac{-rE_0 + (-V_0 + E)R}{R+r} \quad \cdots ヨ$$

④



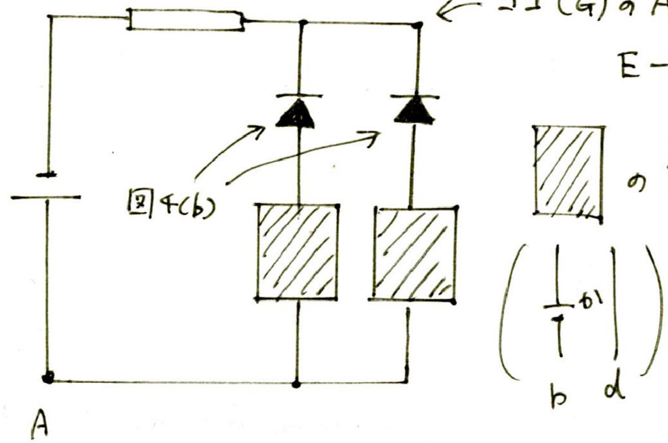
T3

(タ) 図4(a)のダイオードを図4(b)のダイオードに取り替えた以外は③と同じ回路であるから

(ヨ)において $r \to 0$ とすると

$$\lim_{r \to 0} \frac{-rE_0 + (-V_0 + E)R}{R+r} = -V_0 + E \quad \cdots タ$$

(レ)

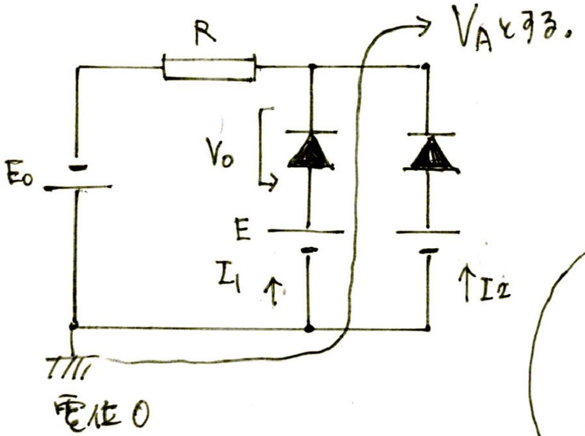


← ココ(G)のAに対する電位が E − V0 となる

の組み合わせを探せという問題

$\underbrace{(b,b),\ (b,d),\ (d,b)}_{\text{回路の対称性により同じ}}$, (d,d) の4つを試せばよい。

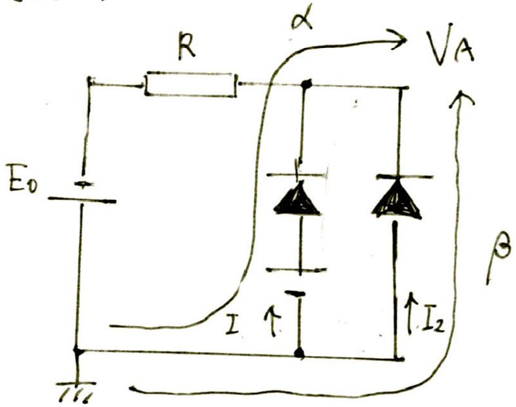
(b, b) のとき



$$V_A = E - V_0$$ $\boxed{\Leftarrow \text{タと同じ}}$

ダイオードに電流が流れている場合、ダイオードの両端電圧は、グラフ(b)より必ずV_0になる。

(b, d) のとき



たどり方α, βを考えたとき、

「$I_1 \neq 0$ かつ $I_2 \neq 0$」では

$$V_A = E - V_0 \quad (\alpha)$$

$$V_A = -V_0 \quad (\beta)$$

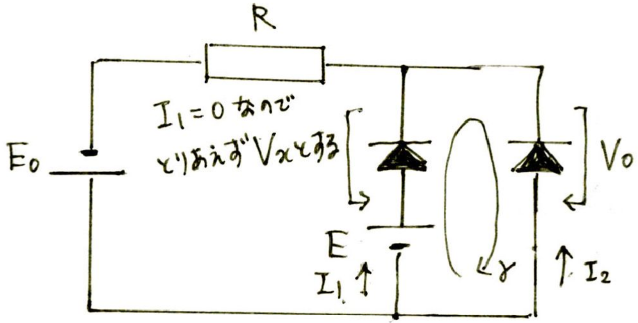
の矛盾した2解がある。

$$\therefore \ I_1 = 0 \ \text{又は} \ I_2 = 0$$

グラフ(b)より、「ダイオードに流れる電流が0」ならば「ダイオードの両端電圧はV_0以外」を取ることが出来る

場合わけして

(i) $I_1 = 0$ のとき、右上図ループγについてキルヒホッフの法則を適用すると



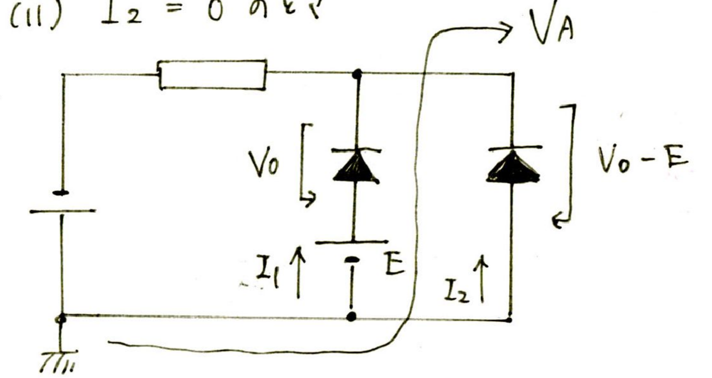
$$E - V_x + V_0 = 0$$

$$\therefore \ V_x = \underbrace{E}_{\text{正}} + V_0$$

題意より $E > 0$ であるので $V_x > V_0$ となるが

これは図4(b)と矛盾する。 $\boxed{\Leftarrow \text{ありえない}}$

(ii) $I_2 = 0$ のとき



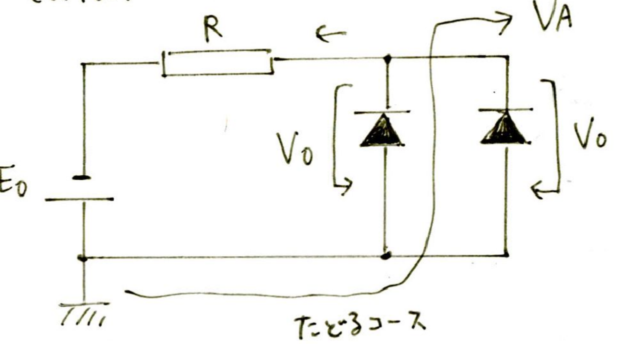
$$V_A = E - V_0$$ $\boxed{\Leftarrow \text{タと同じ}}$

つまりダイオードD_2の端子間電圧は

$$V_0 - E$$

これは図4(b)と矛盾がない。

(d, d) のとき



$V_A = V_0$ $\boxed{\text{⇦タと違う}}$

タと同じものを列挙すると, (b, b), (b, d), (d, b) … ✓

ダイオードのこのへんの性質をうまく使うと、回路を設計する際、電位差が V_0 となる2点を強制的に作ることが出来る（極性逆に使うことの方が多い気がするけど…）。

くわしくは「定電圧ダイオード」で検索!!

以上