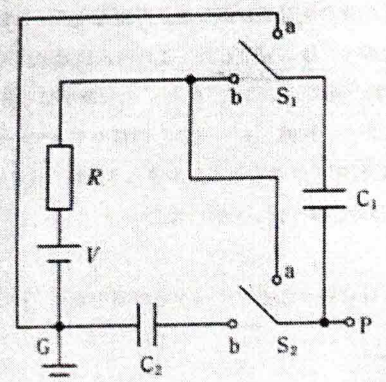
No.

Date 22・2・6　　2023 関西学院大学　全学部 (2/2 分)

〔II〕 図のように，同じ電気容量 C をもつ2個のコンデンサー C_1，C_2，抵抗値 R の抵抗，内部抵抗が無視できる起電力 V の電池，2個のスイッチ S_1，S_2 からなる回路がある．初期状態では，両方のスイッチは開いており，どのコンデンサーも帯電していないものとする．また，点Gは接地されておりその電位は0である．以下の問（1）~（8）の空欄 [①] ~ [⑮] にあてはまる式または数値を答えよ．ただし，式については，空欄 [⑫] をのぞいて，C，R，V のうち必要なものを用いて答えよ．必要に応じて，初項 a，公比 r の等比数列において，$|r|<1$ のときに成り立つ無限等比数列の和に関する公式

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \frac{a}{1-r}$$

を用いてもよい．



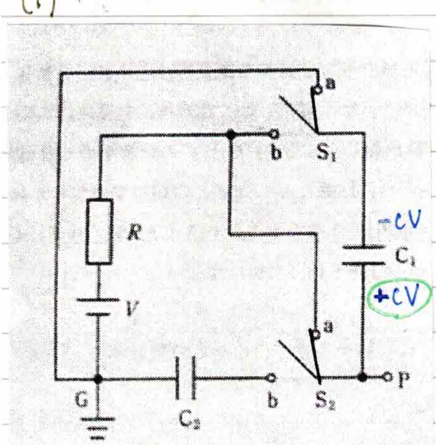
コンデンサー C_1，C_2 の電気容量はともに C とする．

（1） スイッチ S_1，S_2 をともにaにつないだあとに，十分に時間が経過した．このとき，抵抗に流れる電流は [①] であり，コンデンサー C_1 の端子P側の極板の電気量は [②] となる．このとき，コンデンサー C_1 に蓄えられる静電エネルギーは [③] である．

（2） 次に，スイッチ S_1，S_2 をともにbにつなぎ替えたあとに，十分に時間が経過した．この間に，コンデンサー C_2 の端子P側の極板に移動した電気量を q_1 とすると，q_1 は [④] となり，このとき，端子Pの電位は [⑤] となる．

（3） 次に，スイッチ S_1，S_2 をともに再びaにつないだあとに，十分に時間が経過した．このとき，コンデンサー C_1 の端子P側の極板の電気量は [⑥] となる．

(1)

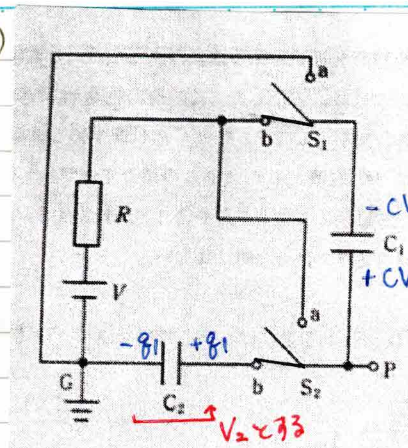


C_1のみ充電される。
満タンなので ① 0

② CV

③ $\frac{1}{2}CV^2$

(2)



上図のようになるので

$$\begin{cases} V_1 + V_2 = V & \cdots ㋐ (キルヒ電圧則) \\ -CV + q_1 = C \cdot V_1 & \cdots ㋑ (Q=CV) \\ q_1 = C \cdot V_2 & \cdots ㋒ (Q=CV) \end{cases}$$

㋑,㋒を㋐に代入

$$\left(-V + \frac{q_1}{C}\right) + \frac{q_1}{C} = V$$

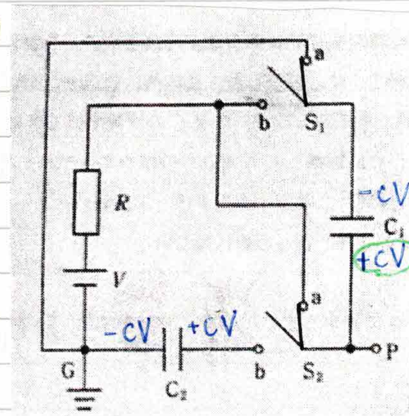
$$\frac{2q_1}{C} = 2V \therefore q_1 = CV$$

(④の答え)

$$Pの電位 = V_2 = \frac{q_1}{C} = V$$ (⑤の答え)

㋒

(3)



電池のせいで再び CV になる (⑥の答え)

No.

Date 22・2・6

(4) 次に，スイッチS_1，S_2をともに再びbにつなぎ替えたあとに，十分に時間が経過した．この間に，コンデンサーC_2の端子P側の極板にあらたに移動した電気量をq_2とすると，q_2は ⑦ となり，このとき，端子Pの電位は ⑧ となる．

(5) 次に，スイッチS_1，S_2をともに再びaにつないだあとに，十分に時間が経過した．このとき，コンデンサーC_1の端子P側の極板の電気量は ⑨ となる．

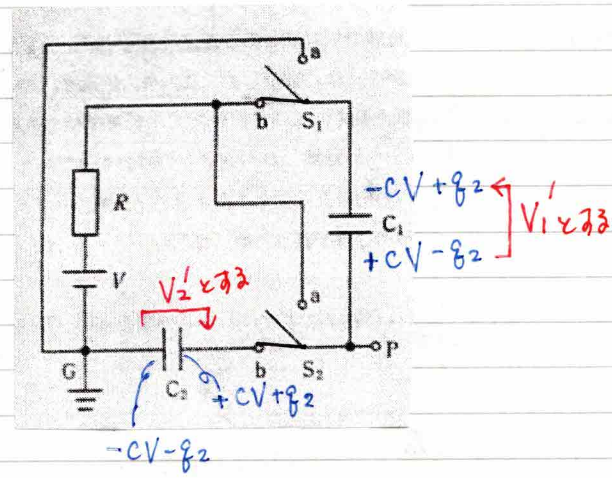
(6) 次に，スイッチS_1，S_2をともに再びbにつなぎ替えたあとに，十分に時間が経過した．この間に，コンデンサーC_2の端子P側の極板にあらたに移動した電気量をq_3とすると，q_3は ⑩ となり，このとき，端子Pの電位は ⑪ となる．

(7) スイッチS_1，S_2を同時にaにつなぎ，十分に時間が経過したあとに，bにつなぎ替えて再び十分長い時間放置する操作をスイッチ操作Xと定義する．各コンデンサーを帯電のない初期状態に戻した回路において，このスイッチ操作Xを$(n-1)$回繰り返したあとに，さらにn回目のスイッチ操作Xを行う間に，コンデンサーC_2の端子P側の極板にあらたに移動した電気量をq_nとすると，q_nはn，C，Vを用いて ⑫ と表される．このスイッチ操作Xをさらに何度も繰り返すとき，端子Pの電位は ⑬ に近づく．

コンデンサーC_1は極板間が空気の平行板コンデンサーであり，その極板の間隔がdで与えられるものとする．この中に，厚さが極板の間隔の半分で極板と同じ面積をもつ比誘電率4の誘電体板を，極板と平行に，極板からのはみ出しがないように挿入した．

(8) このとき，誘電体板を挿入する前に比べてコンデンサーC_1の静電容量は ⑭ 倍となる．この状態ですべてのスイッチを開き，各コンデンサーを帯電のない初期状態に戻した．その後，スイッチ操作Xを何度も繰り返すとき，端子Pの電位は， ⑮ に近づく．

(4)



上図のようになるので，(2)と同様に

$$\begin{cases} V_1'+V_2'=V & \cdots ㋓ \\ -CV+q_2=C\cdot V_1' & \cdots ㋔ \\ CV+q_2=C\cdot V_2' & \cdots ㋕ \end{cases}$$

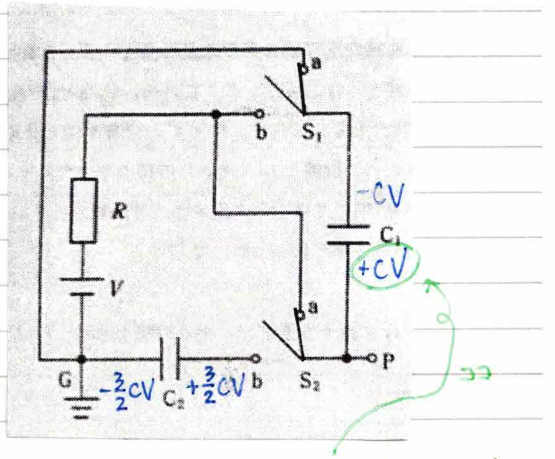
$$\therefore \left(-V+\frac{q_2}{C}\right)+\left(V+\frac{q_2}{C}\right)=V$$

$$\frac{2q_2}{C}=V \quad \therefore q_2=\frac{1}{2}CV$$

(⑦の答え)

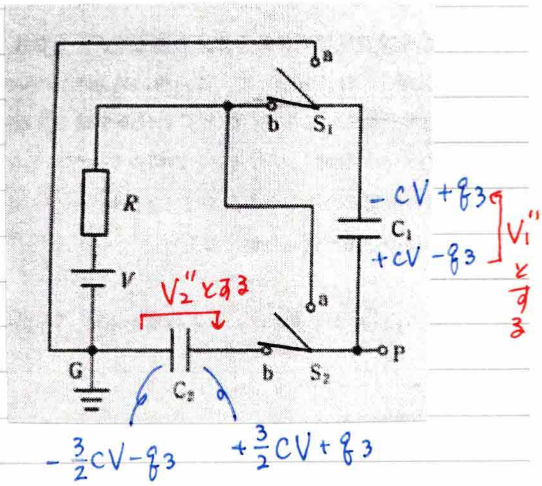
$$\text{Pの電位}=V_2' \underset{㋕}{=} V+\frac{q_2}{C}=\frac{3}{2}V$$ (⑧の答え)

(5)



電池のせいで再びCVになる (⑨の答え)

(6)



上図のようになるので，(2)と同様に

$$\begin{cases} V_1''+V_2''=V & \cdots ㋖ \\ -CV+q_3=CV_1'' & \cdots ㋗ \\ \frac{3}{2}CV+q_3=C\cdot V_2'' & \cdots ㋘ \end{cases}$$

$$\therefore \left(-V+\frac{q_3}{C}\right)+\left(\frac{3}{2}V+\frac{q_3}{C}\right)=V$$

$$\frac{2q_3}{C}=\frac{1}{2}V \quad \therefore q_3=\frac{1}{4}CV$$

(⑩の答え)

$$\text{Pの電位}=V_2''=\frac{3}{2}V+\frac{q_3}{C}=\frac{7}{4}V$$ (⑪の答え)

No.

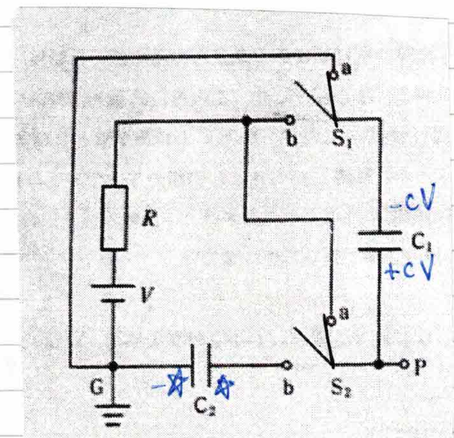
Date 22・2・6

（7） スイッチ S_1、S_2 を同時に a につなぎ、十分に時間が経過したあとに、b につなぎ替えて再び十分長い時間放置する操作をスイッチ操作 X と定義する。各コンデンサーを帯電のない初期状態に戻した回路において、このスイッチ操作 X を $(n-1)$ 回繰り返したあとに、さらに n 回目のスイッチ操作 X を行う間に、コンデンサー C_2 の端子 P 側の極板にあらたに移動した電気量を q_n とすると、q_n は n、C、V を用いて [⑫] と表される。このスイッチ操作 X をさらに何度も繰り返すとき、端子 P の電位は [⑬] に近づく。

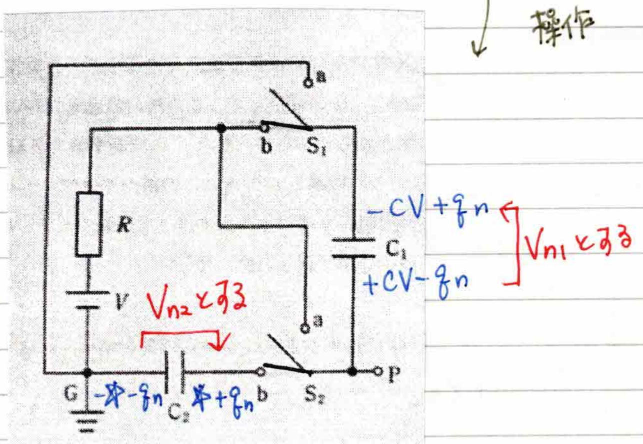
コンデンサー C_1 は極板間が空気の平行板コンデンサーであり、その極板の間隔が d で与えられるものとする。この中に、厚さが極板の間隔の半分で極板と同じ面積をもつ比誘電率 4 の誘電体板を、極板と平行に、極板からのはみ出しがないように挿入した。

（8） このとき、誘電体板を挿入する前に比べてコンデンサー C_1 の静電容量は [⑭] 倍となる。この状態ですべてのスイッチを開き、各コンデンサーを帯電のない初期状態に戻した。その後、スイッチ操作 X を何度も繰り返すとき、端子 P の電位は、[⑮] に近づく。

(7)



n回目の操作



$q_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}CV$，つまり ☆の電荷は

$$☆ = (\underset{\text{初め}}{0} + \underset{\text{1回目で追加}}{1} + \underset{\text{2回目で追加}}{\frac{1}{2}} + \cdots + \underset{\text{n-1回目で追加}}{\frac{1}{2^{n-1}}})CV$$

$$= 1 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}} CV$$

$$= \left\{2\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\right\} CV$$

と推測し，帰納法で証明する。

・$n=1$ のとき 成立

・$n=k$ のとき成立を仮定する。$n=k+1$ のとき

(2)と同様に

$$\begin{cases} V_{n1} + V_{n2} = V & \cdots ㋙ \\ -CV + q_n = CV_{n1} & \cdots ㋚ \\ ☆ + q_n = CV_{n2} & \cdots ㋛ \end{cases}$$

を示せればよい。

㋙の左辺

$$= -V + \frac{q_n}{C} + \frac{☆}{C} + \frac{q_n}{C}$$

$$= -V + \frac{2q_n}{C} + \frac{☆}{C}$$

$$= -V + \frac{1}{\cancel{2^{n-2}}}V + \left\{2\left(1-\frac{1}{\cancel{2^{n-1}}}\right)\right\}V$$

$= V =$ ㋙の右辺　となりOK.

よって $q_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}CV$

(⑫の答え)

また $\lim\limits_{n\to\infty}$ (Pの電位) $= \lim\limits_{n\to\infty} V_{n2}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{C}(\underset{2CV}{☆} + \underset{0}{q_n}) = 2V$$

(⑬の答え)

(8) ⑭ 4倍

⑮ (2)～(7)の操作を，今度は C_1 の容量を4Cとして考えてみる。

㋐㋑㋒は

$$\begin{cases} V_1+V_2=V \\ -4CV+q_1=4CV_1 \\ q_1=CV_2 \end{cases}$$

であるから $q_1=\frac{8}{5}CV$

$V_2=\frac{8}{5}V$

を得る。

㋓㋔㋕は

$$\begin{cases} V_1'+V_2'=V \\ -4CV+q_2=4CV_1' \\ \frac{8}{5}CV+q_2=CV_2' \end{cases}$$

であるから $q_2=\frac{8}{25}CV$

$V_2'=\frac{48}{25}V$

を得る。

よって

$q_n=\frac{8}{5^n}CV$，C_2のP側(☆)の電荷は

$$☆=\left(0+\frac{8}{5}+\frac{8}{5^2}+\cdots\frac{8}{5^{n-1}}\right)CV$$

$$=\frac{8}{5}\,\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{5}}CV$$

$$=2\left\{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right\}CV$$

と推測できる。帰納法で証明すると

・$n=1$のとき成立

・$n=k$のとき成立を仮定する。$n=k+1$のとき

$$\begin{cases} V_{n1}+V_{n2}=V & \cdots ㋜ \\ -4CV+q_n=4CV_{n1} & \cdots ㋝ \\ ☆+q_n=CV_2 & \cdots ㋞ \end{cases}$$

を示せればよい。

$$㋜の左辺=-V+\frac{q_n}{4C}+2\left\{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right\}V+\frac{q_n}{C}$$

$$=-V+\frac{5}{4C}\cdot\frac{8}{5^n}CV+2\left\{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right\}V$$

$$=-V+\frac{2}{5^{n-1}}V+2V-\frac{2}{5^{n-1}}V$$

$$=V$$

= ㋜の右辺となりOK

よって

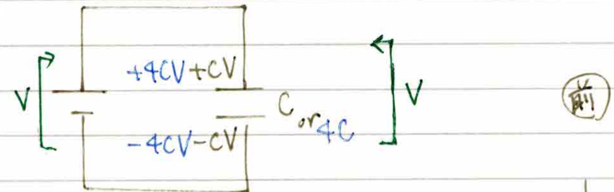
$$⑮の答え=\lim_{n\to\infty}V_{n2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[2\left\{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right\}V+\frac{8}{5^n}V\right]$$

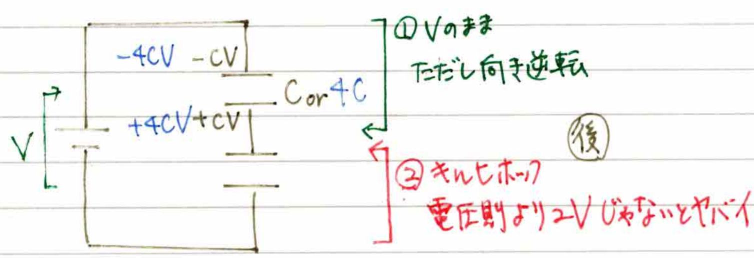
$$=2V$$

$\boxed{⑬と⑮の別解}$

十分操作を繰り返すと、スイッチを切り替えても電荷の移動が起こらなくなると予想される。このとき



↓つなぎ替え



答 2V