No.

Date 23. 2. 3

2023 関西学院大学 全学部

〔Ⅰ〕図1のように、地球の表面上にある点Pから、質量mの小物体Aを鉛直上向きに打ち上げる。以下の問（1）～（10）に答えよ。ただし、万有引力定数をGとし、地球は、質量M、半径Rの密度が一様な球体であるとする。また、Aの質量は地球の質量に比べて十分小さく、さらに、地球の運動、地球の周囲の空気、その他の天体の影響は無視できるとする。

（1）Aが地球から無限遠に飛び去るために必要な、AをPから打ち上げる速さの最小値を求めよ。

（2）問（1）で求めた速さより小さな速さでAをPから打ち上げると、地球の中心OからAの到達できる最大の点までの距離はr（ただし$r>R$）であった。このとき、AをPから打ち上げる速さを求めよ。

問（2）の状況において、到達できる最大の高さでOからの距離がrである図2の点SにAが到達したとき、ある瞬間的にはたらく内力により、Aは質量m'の小物体Bと質量$m-m'$の小物体Cに分裂した。さらに、この分裂直後、Bは、Sを始点として水平方向を向く図2の矢印アの向きに打ち出された。ただし、分裂後にBとCの間にはたらく力の影響は無視できるとする。

（3）分裂直後におけるBにはたらく力の向きとして、最も適切なものを図2の矢印ア～クの中から一つ選び、記号で答えよ。ただし、イ～クの始点はSにあり、さらに、イ～クは、Pとアを含む平面上にある。また、ウは鉛直上向き、キは鉛直下向き、オはアと逆の水平方向、イはアとウの間、エはウとオの間、カはオとキの間、クはキとアの間を向く。

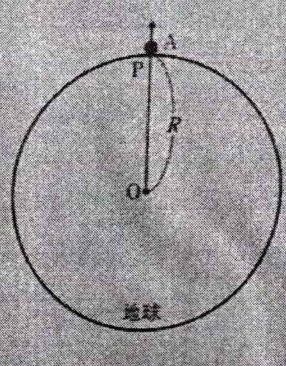


図1

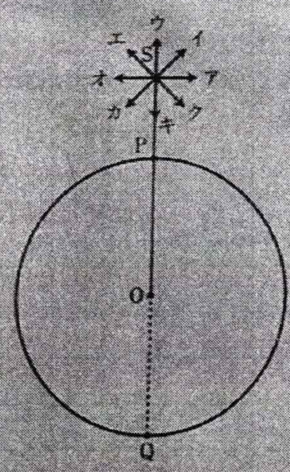


図2

(1) 工・保より

$$\underbrace{\frac{1}{2}m\cdot 0^2+0}_{\text{無限遠}}=\underbrace{\frac{1}{2}mv^2+\left(-G\frac{Mm}{R}\right)}_{\text{点P}}$$

$$\therefore v=\sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

(2) 工・保より

$$\underbrace{\frac{1}{2}m\cdot 0^2+\left(-G\frac{Mm}{r}\right)}_{\text{最高点}}=\underbrace{\frac{1}{2}mv^2+\left(-G\frac{Mm}{R}\right)}_{\text{点P}}$$

$$\therefore \frac{1}{2}\cancel{m}v^2=G\frac{M\cancel{m}}{R}-G\frac{M\cancel{m}}{r}$$

$$v=\sqrt{2GM\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{2GM(r-R)}{Rr}}$$

(た) $r\to\infty$ で v は(1)のvに一致するはず

(3)「分裂直後」とあるので、AとBの間に働く内力は、もうない

Bには重力のみがかかるので キ

(4) Bの運・方は

$$m'\frac{v^2}{r}=G\cdot\frac{Mm'}{r^2}$$

$$\therefore v=\sqrt{\frac{GM}{r}}$$

(5) 

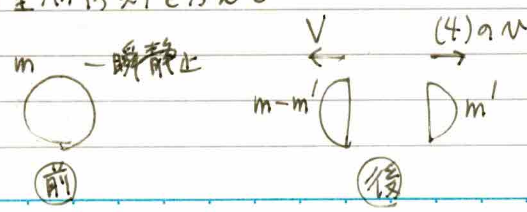
$$T=\frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM}{r}}}$$

$$=2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

(6)「分裂直後のCの進む向き」とあるので

オ

(7) 求める速さをVとする。接線方向について運動量保存則を考えて



分裂後，Bは，Oを中心とする円軌道をえがきながら，地球のまわりを周回した．

(4)　分裂直後におけるBの速さを求めよ．

(5)　Bの円運動の周期を求めよ．

(6)　分裂直後におけるCの進む向きとして，最も適切なものを図2のアークの中から一つ選び，記号で答えよ．

(7)　分裂直後におけるCの速さを求めよ．

図2のように，QをPに対し地球の反対側にある地表の点とする．分裂後，Cは，地球に近づきながらQで接する楕円軌道をえがき，Qに到達した．この楕円軌道上において，ケプラーの第2法則より，Cの面積速度は一定に保たれる．ここで，OとCの位置を通る直線に垂直な方向にCが動くとき，Cの面積速度はCのOからの距離とCの速さとの積の半分で与えられる．また，ケプラーの第3法則より，Cの楕円軌道の周期の2乗をその長半径（半長軸の長さ）の3乗で割った値は，Bの円軌道の周期の2乗をその半径の3乗で割った値に等しい．

(8)　CがSを出発してからQに達するまでにかかる時間を求め，r，R，M，Gのうち必要なものを用いて答えよ．

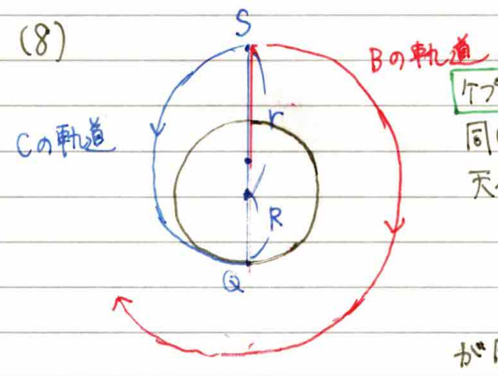
(9)　Qに到達する直前におけるCの速さを求め，r，R，M，Gのうち必要なものを用いて答えよ．

(10)　Cの質量のBの質量に対する比$\frac{m-m'}{m}$を求め，r，R，M，Gのうち必要なものを用いて答えよ．

$$(m-m')V + m'\cdot\sqrt{\frac{GM}{r}} = 0$$

$$\therefore\ |V| = \frac{m'}{m-m'}\sqrt{\frac{GM}{r}}$$

(8)



ケプラーの第3法則
同じ「親」を回る
天体は

$$\frac{T^2}{a^3}$$

が同じになる
（a：軌道長半径）

Cの軌道長半径は $\frac{r+R}{2}$ なので．
求める時間をtとすると

$$\underbrace{\frac{(2t)^2}{\left(\frac{r+R}{2}\right)^3}}_{C} = \underbrace{\frac{T^2}{r^3}}_{B}$$

$$\therefore\ \frac{\cancel{32}\,8\,t^2}{(r+R)^3} = \frac{\cancel{4}\pi^2\frac{\cancel{r^3}}{GM}}{\cancel{r^3}}$$

$$t^2 = \frac{\pi^2(r+R)^3}{8GM}$$

$$t = \pi\sqrt{\frac{(r+R)^3}{8GM}}$$

(た) $R=r$で$t=\frac{T}{2}$になるはず

(9) 求める速さをV_cとする。
面積速度一定則と(7)の結果より

$$\underbrace{\frac{1}{2}RV_c}_{CのQ点での値} = \underbrace{\frac{1}{2}rV}_{CのS点での値}\ (7)$$

$$V_c = \frac{r}{R}\cdot\frac{m'}{m-m'}\sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$= \frac{m'}{(m-m')R}\sqrt{GMr}$$

(10) Cについて，Q点とS点で(エ.保)を立てる。

$\frac{m-m'}{m'} = x$として

$$\underbrace{\frac{1}{2}\cancel{(m-m')}V_c^2 + \left(-G\frac{M\cancel{(m-m')}}{R}\right)}_{Q点}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\cancel{(m-m')}V^2 + \left(-G\frac{M\cancel{(m-m')}}{r}\right)}_{S点}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{\cancel{GM}r}}{Rx}\right)^2 - \frac{\cancel{GM}\,1}{R} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\cdot\sqrt{\frac{\cancel{GM}}{r}}\right)^2 - \frac{\cancel{GM}\,1}{r}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{r}{R^2x^2} - \frac{1}{rx^2}\right) = \frac{1}{R} - \frac{1}{r}$$

両辺$\times 2R^2r$　$\frac{r^2}{x^2} - \frac{R^2}{x^2} = 2(Rr - R^2)$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{2R}{r+R}$$

$$\therefore\ x = \sqrt{\frac{r+R}{2R}}$$

(た) $r=R$で $m=m'$ $(x=1)$ とか