慣性力

「加速度系において，力のつり合いの式／運動方程式を立てよ」という問題をやりましょう．

一般に座標系のとり方は，回答者の任意ですが，加速度系（加速度運動をしている座標系）をとった場合，物体に慣性力「ma」を追加する必要があります。

その一点以外は慣性系（外から見た座標系のこと）と何ら変わりありません。

例．エレベータ（上向き加速度 a'）の床にある物体

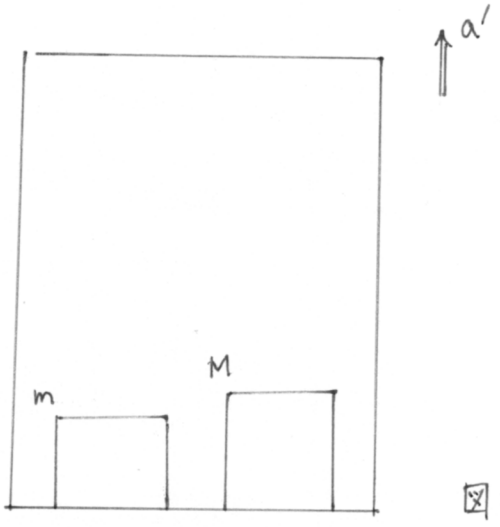


図1

エレベータを基準とした座標系をとると，座標系が加速度 a' で上向きに動いていることになります。一度座標系を加速度系でとった以上，すべての物体に慣性力を追加しなければいけません（図2）

（物体の質量に応じて慣性力の大きさが違うことに注意）

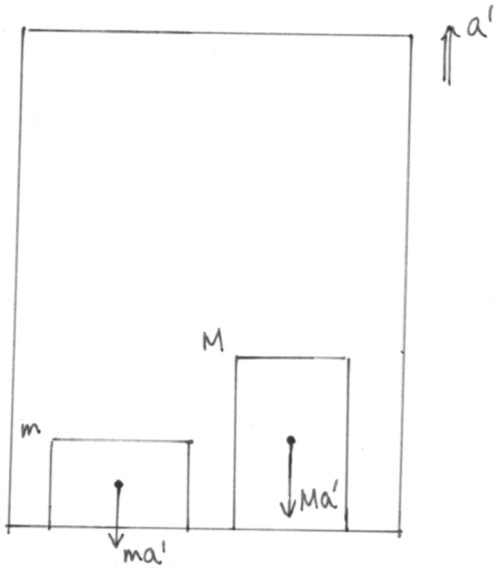


図2

その一点以外は慣性系のときと何ら変わりありません。従って残りの力を書き込めば，

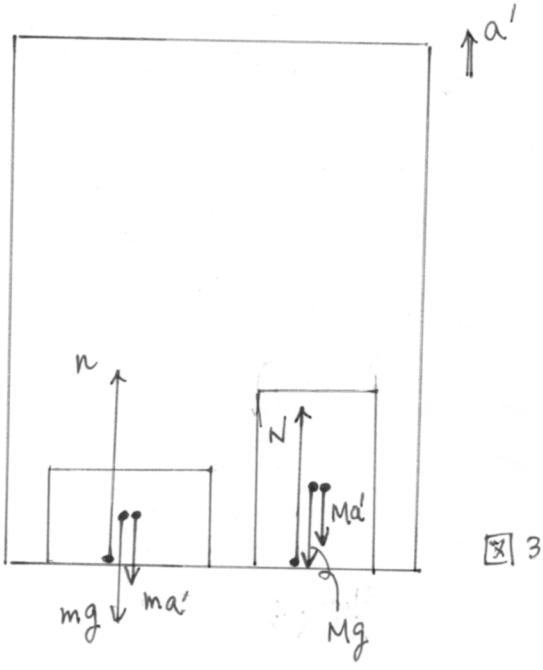


図3

となります。加速度系から見て，物体は静止していますから，物体にかかる力はつり合っています。つり合いの式はそれぞれ

$$\begin{cases} n - mg - ma' = 0 \\ N - Mg - Ma' = 0 \end{cases} \quad \cdots ①$$

となり，n，N がわかります。これで完成です。

同じ問題を外から見た系（慣性系）で解いてみましょう。

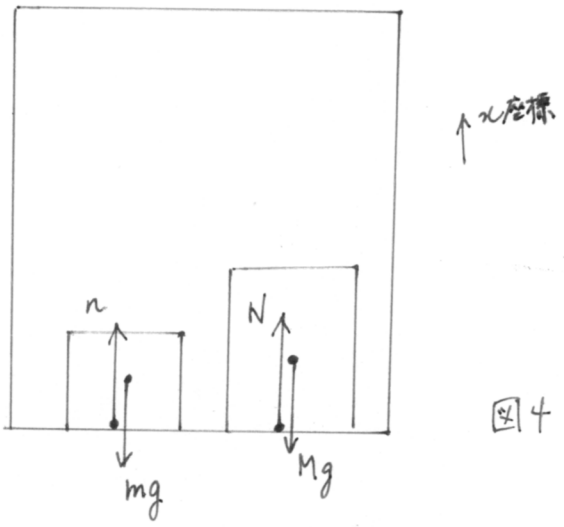


図4

かかっている力はこれだけです。これら2つの物体は加速度a'で運動していますから、運動方程式は

$$\begin{cases} n - mg = ma' \\ N - Mg = Ma' \end{cases} \quad \cdots ②$$

となり、①と無矛盾です。これで完成です。

①、②のどちらで解いても良いのですが、

ダランベール（1743）は

「複雑な問題では、加速度系で考えて力のつり合いの問題として定式化した方が良い」と結論しました。

ニュートン（1687）から約半世紀後の話です。

ただ、大学入試では、慣性系で解いた方が楽なこともあります（爆…）。

やってはいけないのは、

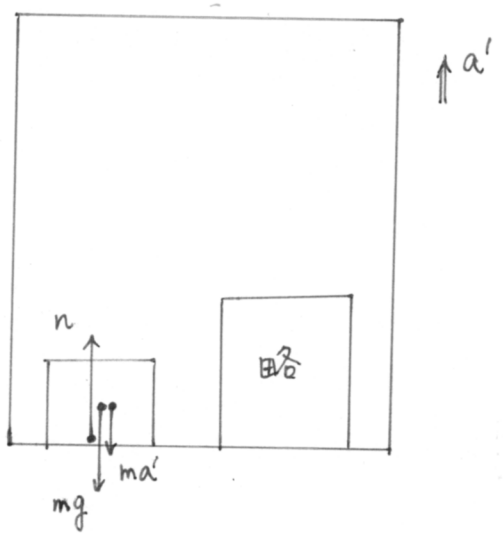


図5

$$\underbrace{n - mg - ma'}_{\text{加速度系}} = \underbrace{ma'}_{\text{慣性系}}$$

などと系をごっちゃにして運動方程式を立ててしまうことです。

座標系の加速度a'と物体の加速度aもごっちゃにしやすいです。

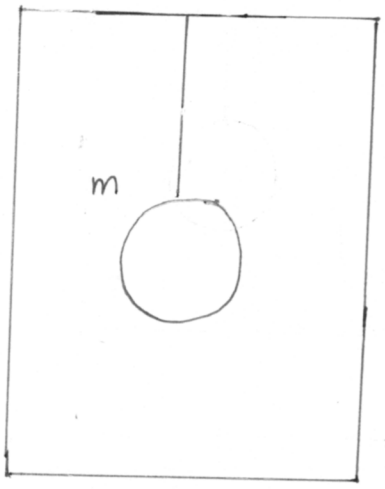
・慣性力に反作用はありません。図3左側において、nの反作用はエレベータに、mgの反作用は地球の重心にかかっていますが、ma'の反作用はありません。

・「慣性力のする仕事」は高校範囲外です。入試で出くわしたら、必ず別ルートで解けます。従って慣性力のからむエネルギー保存も出ません。

前置きが長くなりましたが、問題をやってみましょう。

加速度系において、力のベクトルを書きこみ、つり合いの式／運動方程式を立てよ

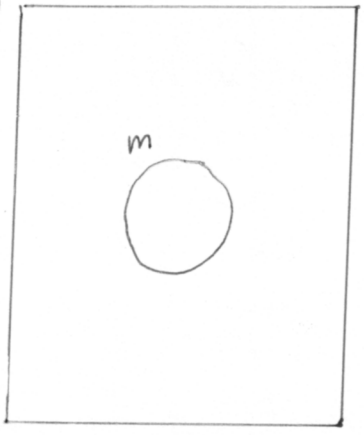
(1)



エレベータ ⇑ a'

<つり合いの式>

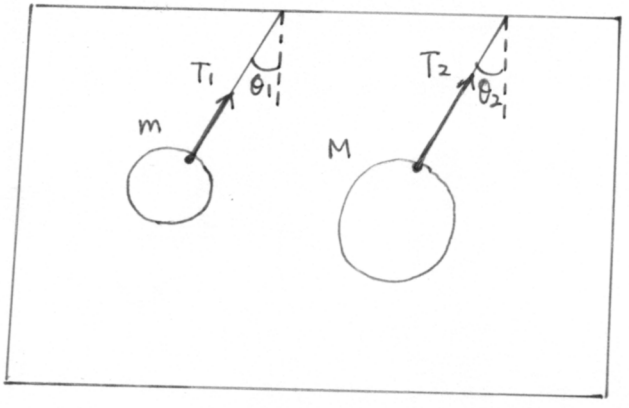
(2)



エレベータ ⇑ a'

<運動方程式>

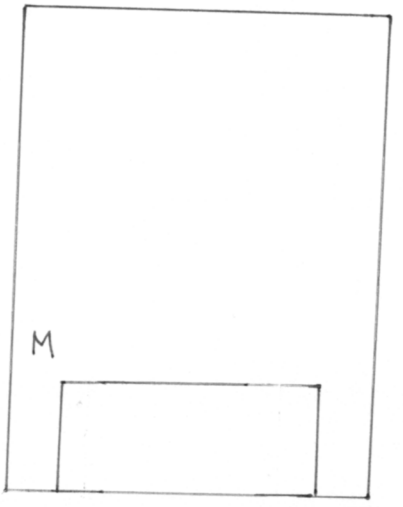
(3)



電車 ⇒ a'

<つり合いの式>

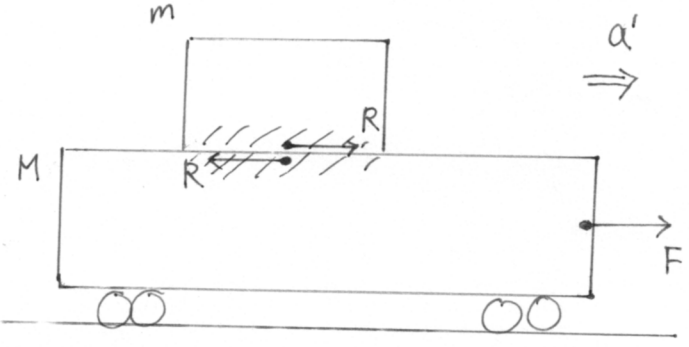
(4)



エレベータ ⇓ a'

<つり合いの式>

(5)



台車 a' ⇒

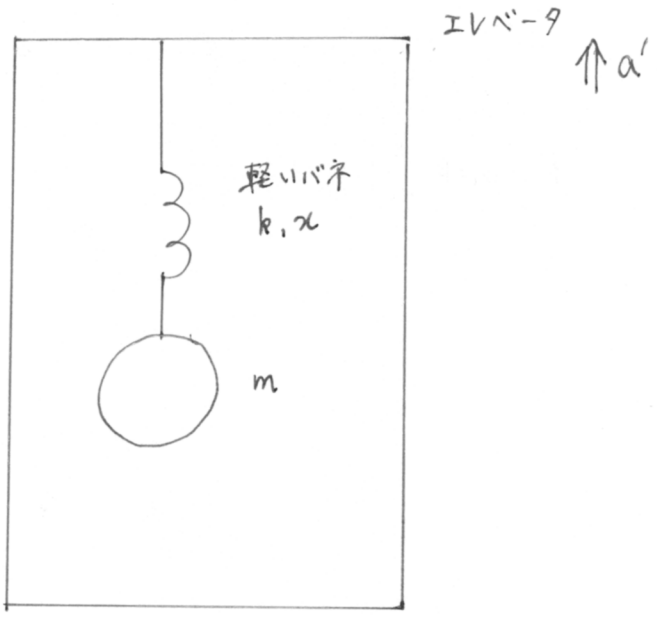
・物体は台車と一体となって加速度運動

・mM間のみまさつあり

<mのつり合いの式>

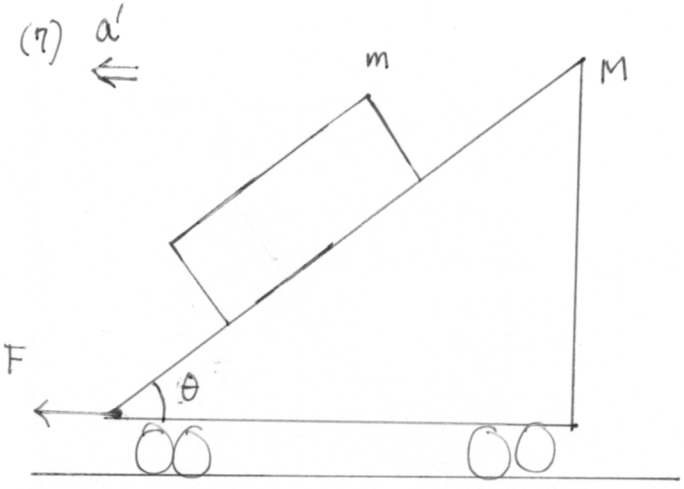
<Mのつり合いの式>

(6)



<つり合いの式>

(7)



・物体は台車と一体となって加速度運動

・すべてまさつなし

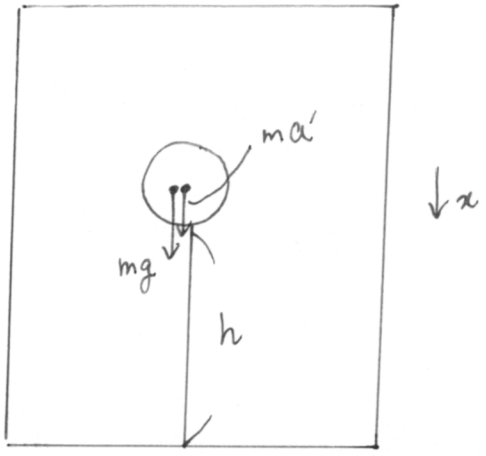
<mのつり合いの式>

<Mのつり合いの式>

あともう一息です。(2)において、

物体が床に落下するまでの時間を考えましょう。

物体の最初の高さをhとします。



運動方程式は $ma' + mg = ma$

でしたから、物体の加速度系における加速度aは

$a = a' + g$ (= tによらず一定)

となり、等加速度運動をしていることがわかります。

従って、公式「$y = \frac{1}{2}at^2$」より

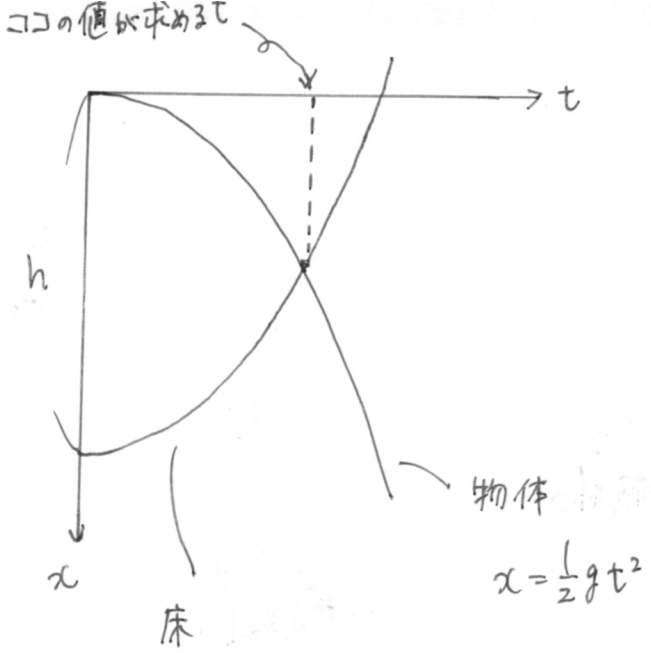
$$h = \frac{1}{2}(a' + g)t^2$$

$$\therefore t = \sqrt{\frac{2h}{a' + g}}$$

とわかります。

これを慣性系で解くには、

例えばダイヤグラムを書いてやります。



$$\therefore \frac{1}{2}gt^2 = -\frac{1}{2}a't^2+h$$

$$\left(\frac{1}{2}g+\frac{1}{2}a'\right)t^2 = h$$

$$(g+a')t^2 = 2h$$

$$t^2 = \frac{2h}{g+a'}$$

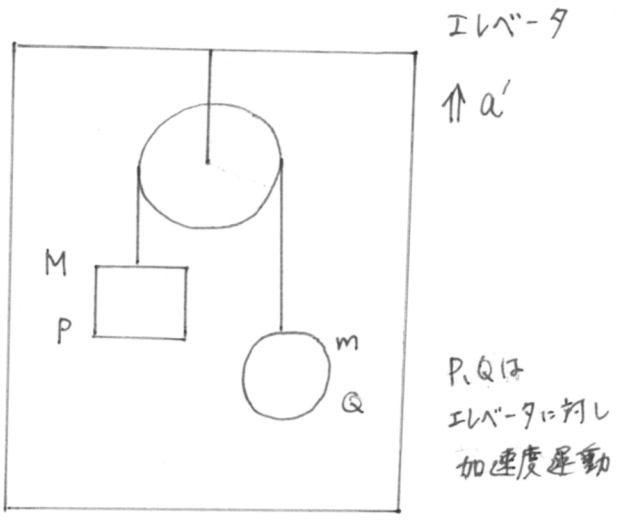
$$t = \sqrt{\frac{2h}{g+a'}}$$

となります。めでたく、加速度系と慣性系で同じ結果が出ました。

以上

慣性力　補充問題

(1)

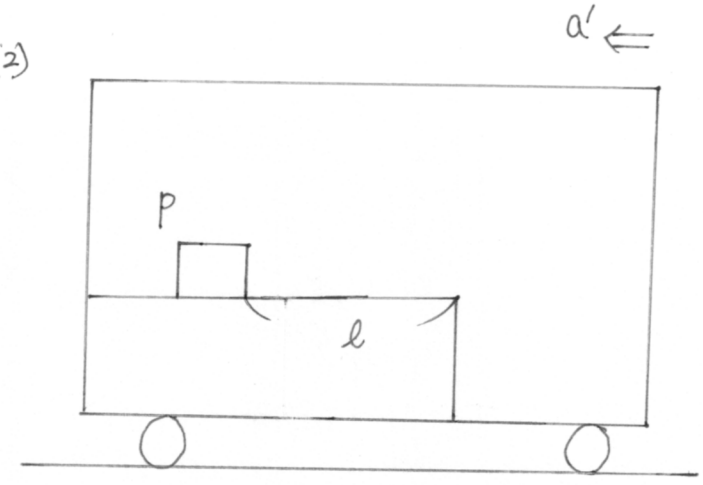


〈運動方程式〉

P：

Q：

(2)

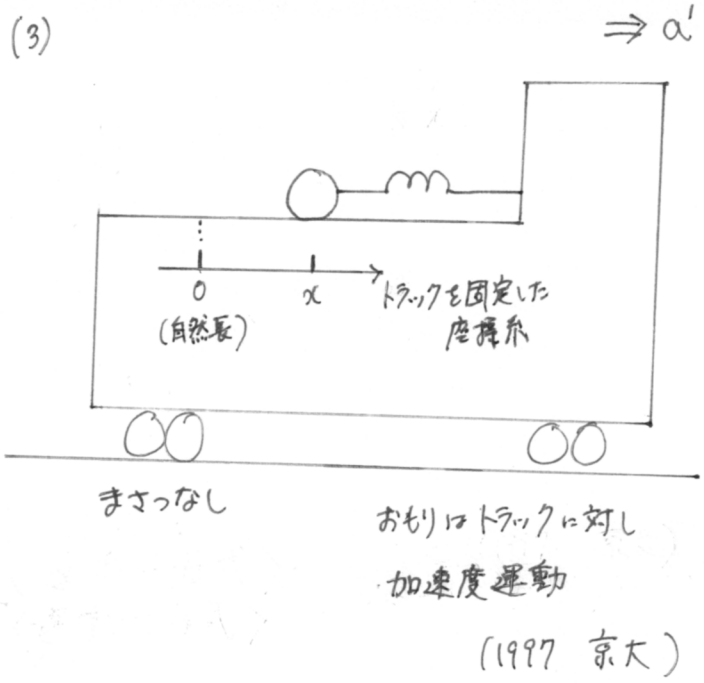


物体Pは最初静止している。l移動して、台から落ちるのに必要な時間tはいくらか。

物体はlに比べて非常に小さいとする。

〈運動方程式〉

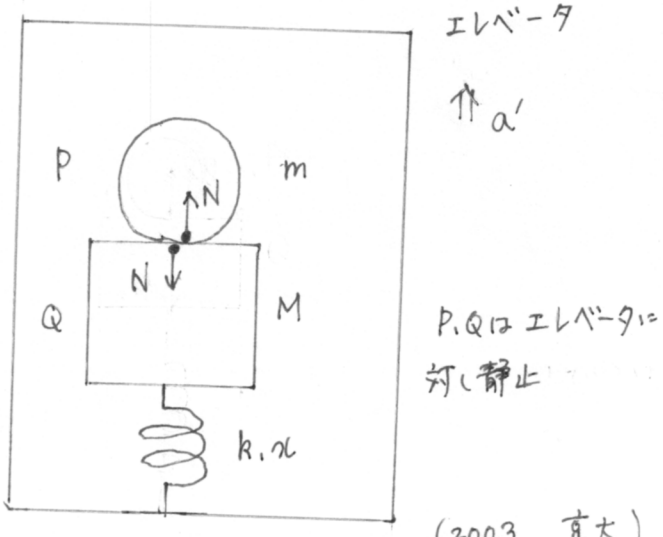
(3)



(1997　京大)

〈運動方程式〉

(4)



(2003　京大)

〈つり合いの式〉

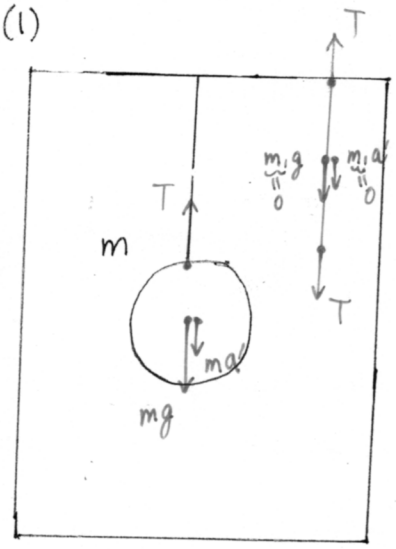
P：

Q：

以上

加速度系において、力のベクトルを書きこみ、つり合いの式／運動方程式を立てよ

(1)



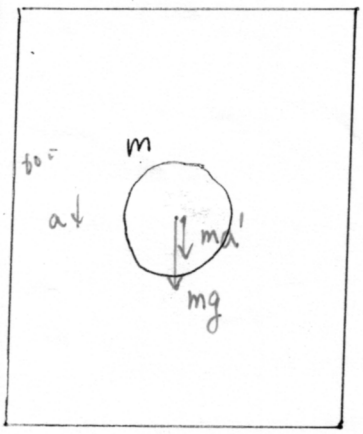
エレベータ ⇑a'

<つり合いの式>

↑x

$T - ma' - mg = 0$

(2)



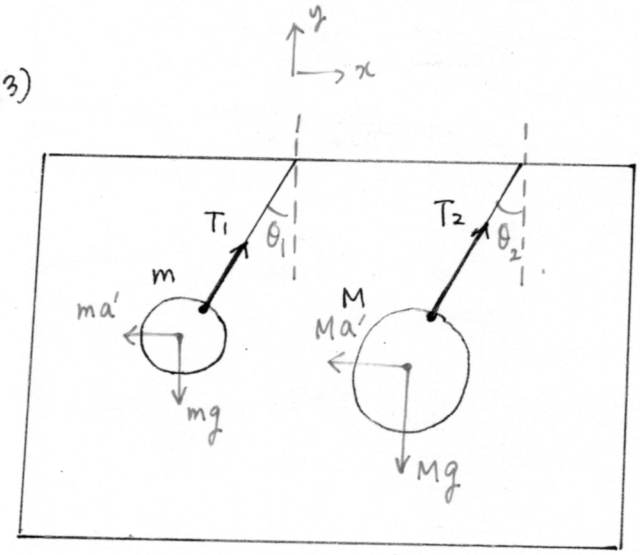
エレベータ ⇑a'

<運動方程式>

↓x

$ma' + mg' = ma$

(3)

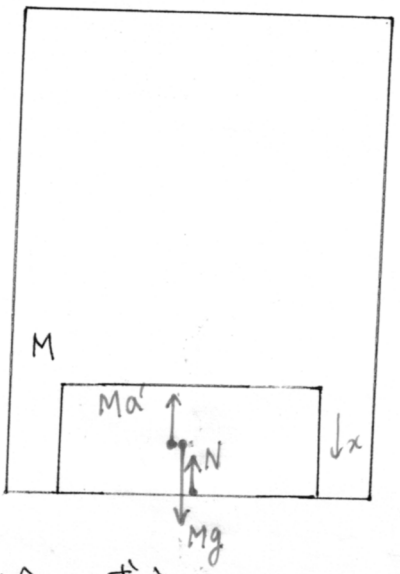


電車 ⇒a'

<つり合いの式>

$$\begin{cases} T_1 \sin\theta_1 - ma' = 0 \\ T_1 \cos\theta_1 - mg = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} T_2 \sin\theta_2 - Ma' = 0 \\ T_2 \cos\theta_2 - Mg = 0 \end{cases}$$

(4)



エレベータ

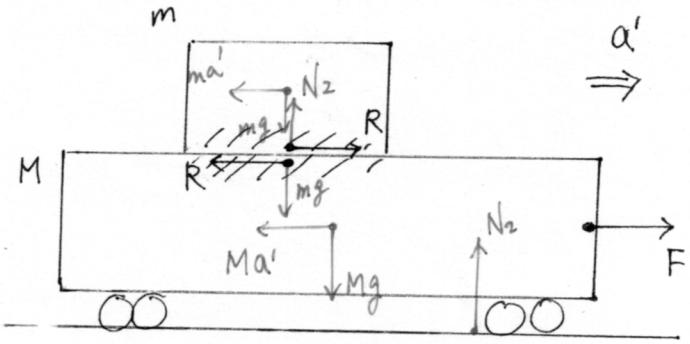
⇓a'

$Mg - N - Ma' = 0$

↓x

<つり合いの式>

(5)



台車

a'

⇒

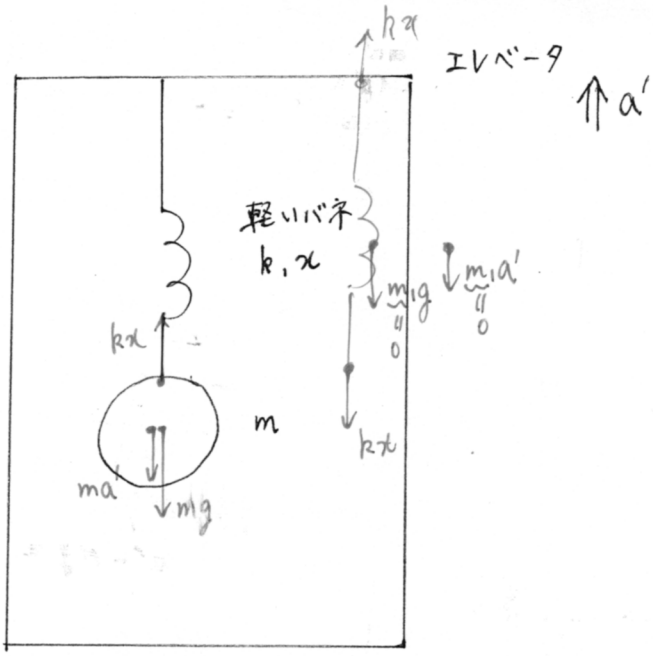
・物体は台車と一体となって加速度運動

・mM間のみまさつあり

<mのつり合いの式>

<Mのつり合いの式>

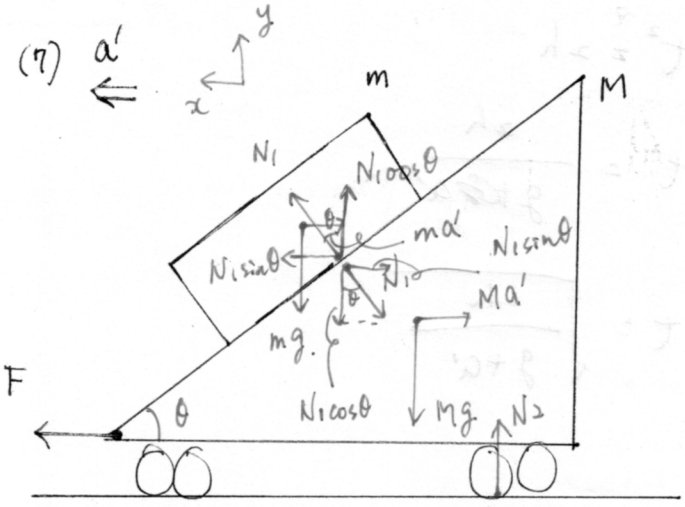
(6)



<つり合いの式>

$$kx - ma' - mg = 0$$

(7)



・物体は台車と一体となって加速度運動

・すべてまさつなし

<mのつり合いの式>

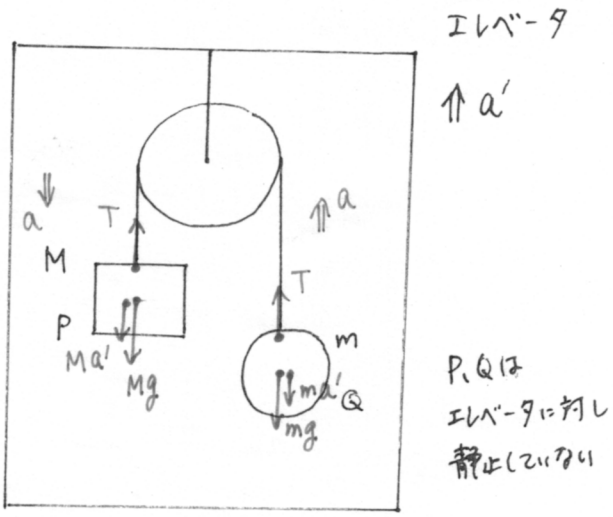
$$\begin{cases} N_1 \sin\theta - ma' = 0 \\ N_1 \cos\theta - mg = 0 \end{cases}$$

<Mのつり合いの式>

$$\begin{cases} F - N_1 \sin\theta - Ma' = 0 \\ N_2 - N_1 \cos\theta - Mg = 0 \end{cases}$$

慣性力　補充問題

(1)



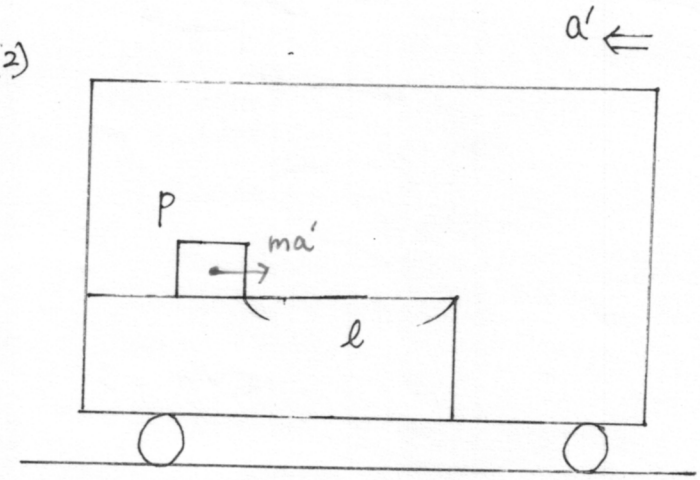
P, Qは
エレベータに対し
静止していない

〈運動方程式〉

$P: Ma' + Mg - T = Ma$

$Q: T - ma' - mg = ma$

(2)



物体Pは最初静止している。l 移動して、
台から落ちるのに必要な時間 t はいくらか

物体は l に比べ非常に
小さいとする

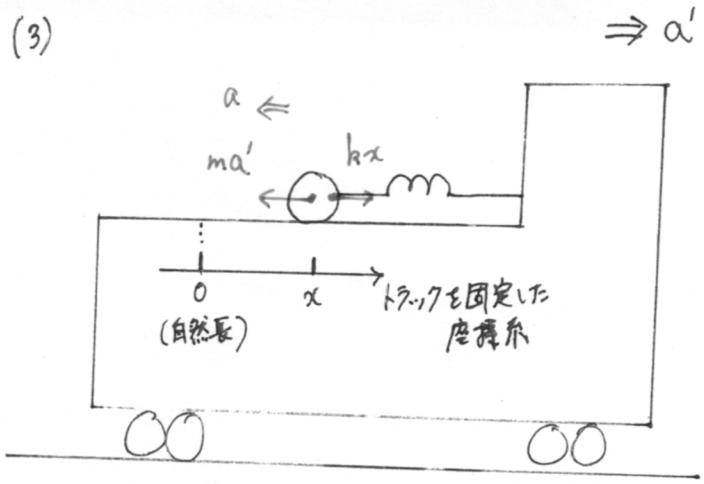
〈運動方程式〉

$$\underbrace{ma'}_{F} = ma$$

$$\therefore a = a'$$

$$l = \frac{1}{2}a't^2 \quad \therefore t^2 = \frac{2l}{a'} \quad \therefore t = \sqrt{\frac{2l}{a'}}$$

(3)



まさつなし

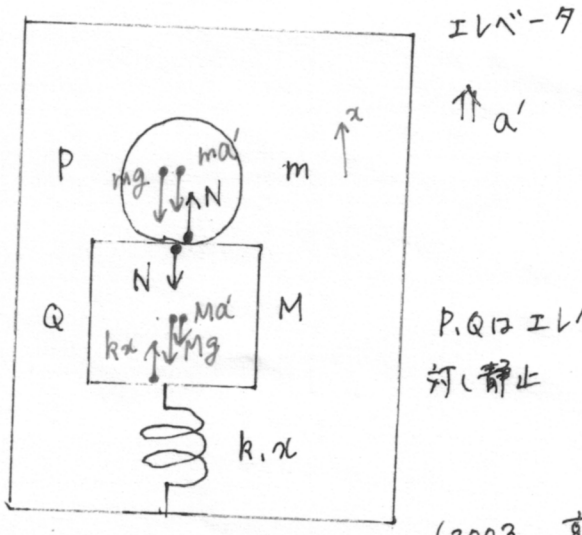
おもりはトラックに対し
静止していない

(1997　京大)

〈運動方程式〉

$$ma' - kx = ma$$

(4)



P, Qは エレベータに
対し静止

(2003　京大)

〈つり合いの式〉

$P: N - ma' - mg = 0$

$Q: kx - Ma' - Mg - N = 0$

以上