No.

Date 23・1・7 広島大 2019 (20分)

〔I〕 図1のように，半径 r の円筒面が水平面 A に滑らかに接続するよう配置されている。円筒面上の，水平面 A から高さ r の位置で，質量 m の小球を静かに放す。小球は円筒面上を滑り落ち，水平面 A 上を運動した後，落下して水平板と衝突する。水平面 B から水平面 A の高さは h とする。また水平板は，バネ定数 k のバネに繋がっており，初めは右側の水平面 B と同じ高さで，釣り合いの位置で静止している。水平板の水平方向の長さは L，質量は $5m$ である。このとき以下の問いに答えよ。ただし，以下では，小球は紙面内のみを運動するものとし，水平板は，水平を保ち鉛直方向のみに運動する。小球，円筒面，水平面 A，B，水平板のそれぞれの間に摩擦はなく，空気抵抗も無視できるとする。小球と水平板の衝突は弾性衝突とし，バネの質量は無視できるとする。また，重力加速度の大きさを g とする。

問 1 図1のように小球と円筒の中心点を結ぶ線が，水平面と角 θ のとき $\left(ただし\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$，小球の速さを $m,\ r,\ \theta,\ g$ の中から必要なものを用いて表せ。また，導き方も記せ。

問 2 問1のとき，小球に円筒面から働く垂直抗力の大きさを $m,\ r,\ \theta,\ g$ の中から必要なものを用いて表せ。また，導き方も記せ。

水平面 A 上での小球の速さを v_0 とする。鉛直下向きを正とし，水平方向は右向きを正とし，以下の問に答えよ。

問 3 小球が最初に水平板に衝突する直前の水平方向の速度 v_x と鉛直方向の速度 v_y を $m,\ g,\ h,\ v_0$ の中から必要なものを用いて表せ。また，導き方も記せ。

問 4 小球が水平板を飛び越えず初めに水平板に衝突するための v_0 に対する条件を $h,\ g,\ L$ を用いて表せ。また，導き方も記せ。

問 5 小球が最初に水平板に衝突した直後の小球の鉛直方向の速度 v_y' を求めよ。このときの水平板の速度 V も合わせて答えよ。ただし，v_y を用いて答えよ。また，導き方も記せ。

問 6 小球が最初に水平板に衝突した後，水平板が最も下がったとき，最初の位置からの距離を $m,\ k,\ v_y$ を用いて表せ。ただし，小球と水平板との衝突は，最初の1回のみとする。また，導き方も記せ。

問 7 小球が最初に水平板に衝突した後，次に水平面 B に衝突するために v_0 はある値を超えなければならない。この値を $h,\ g,\ L$ を用いて表せ。ただし，水平面 B は十分に長いとする。また，水平板が水平面 B と異なる高さのとき小球は水平板と衝突しないとし，そのための条件は解答に含めなくて良い。

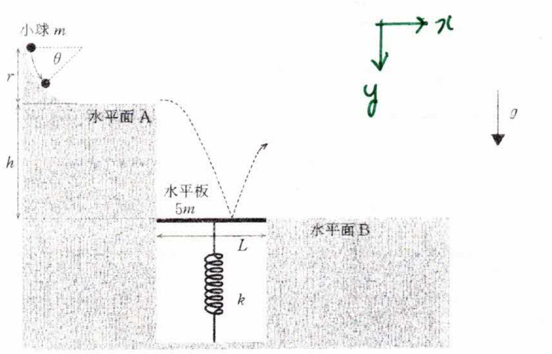
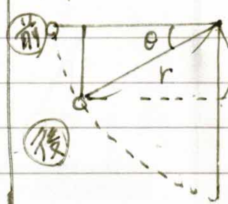


図1

問1 重・位 の基準を最初の位置にとる。



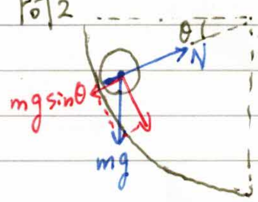
求める速さを v とすると エ・保 より

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgr\sin\theta$$

$$\therefore v = \sqrt{2gr\sin\theta}$$

たしかめ $\theta = 0°$ で $v = 0$

問2 外から見た 座 で考えてみる。



小球の 運・方 は

$$m\frac{v^2}{r} = N - mg\sin\theta$$

これに問1の結果を代入して

$$m\frac{2g\cancel{r}\sin\theta}{\cancel{r}} = N - mg\sin\theta$$

$$N = 3mg\sin\theta$$

た $\theta = 0°$ で $N = 0$

問3 水平面を離れてから水平板に衝突するまでの小球の加速度は $(0,\ g)$ であるから

x方向について $v_x = v_0$

y方向について「$v^2 - v_0^2 = 2ax$」より

$$v_y^2 - 0^2 = 2gh$$

$$\therefore v_y = \sqrt{2gh}$$

た $h = 0$ で $v_y = 0$

問4 水平面を離れるとき時刻 $t=0$，水平板に衝突するとき $t=t_0$ とする。

衝突時の x, y 座標を考えて

x: $0 < v_0 t_0 < L$ …①

$$y:\ h = \frac{1}{2} g t_0^2 \quad \cdots ②$$

$t_0 = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$

②を①に代入して

$$0 < v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} < L$$

$$\therefore\ 0 < v_0 < L\sqrt{\frac{g}{2h}}$$

不等号は≦でもOK

(た) $L \to 0$ で $v_0 \to 0$ とか

問5 (衝突は瞬時に起こる(ばねがやりとりする力積はゼロ)と近似している。でないと解けない)

Ft

y方向の運・保を考えて

$$\underbrace{m v_y' + 5mV}_{後} = \underbrace{m v_y + 5m \cdot 0}_{前} \quad \cdots ③$$

(は)

$$1 = -\frac{v_y' - V}{v_y - 0} \quad \cdots ④$$

ココの計算は長くなりがち こんな感じがオススメ

③,④より v_y', V を出すと

$$v_y' + 5V = v_y \quad \cdots ③'$$

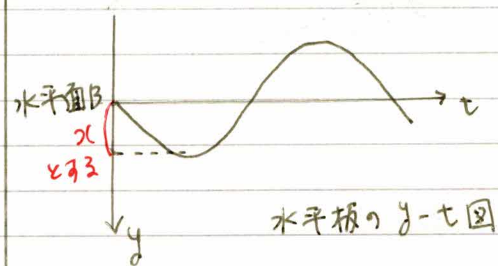
$$-)\ \boxed{\times 5}\ -v_y' + V = v_y \quad \cdots ④'$$

$$6v_y' = -4v_y \quad \therefore\ v_y' = -\frac{2}{3} v_y$$

④'に代入 $V = v_y + v_y' = \frac{1}{3} v_y$

(た) 元の③,④に代入とか「v_y' 下向き v_y 上向き」でOKとか

問6 水平面Bはつり合いの位置なので、ココが単振動の中心。



xを求める。運・保の基準をBにとり、単振動のエ・保を適用すると

$$\frac{1}{2} \cdot 5m \cdot 0^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} \cdot 5m \cdot v_y'^2 + \frac{1}{2} k \cdot 0^2$$

$$\therefore\ x = v_y' \sqrt{\frac{5m}{k}} = \frac{1}{3} v_y \cdot \sqrt{\frac{5m}{k}}$$

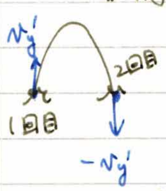
(た) $v_y = 0$ で $x = 0$

問7 2回目の衝突では水平板ではなく、水平面Bに衝突しないといけない。2回目の衝突は $t = t_0'$ で起こるとすると

$$v_y' < 0 \ \cdots ⑤ \quad かつ \quad v_0 t_0' > L \ \cdots ⑥$$

1回目の衝突後上に行く

が必要。また「$v = v_0 + at$」より



$$-v_y' = v_y' + g(t_0' - t_0) \quad \cdots ⑦$$

これらから v_0 の条件を出す。⑤は問5の結果より自動的に満たされているので、⑦より

$$g(t_0' - t_0) = -2v_y'$$

$$\therefore\ t_0' = -\frac{2v_y'}{g} + t_0 = -\frac{2}{g} \cdot \left(-\frac{2}{3} v_y\right) + \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$= \frac{4}{3g}\sqrt{2gh} + \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{7}{3}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

⑥に代入 $v_0 \cdot \dfrac{7}{3}\sqrt{\dfrac{2h}{g}} > L \quad \therefore\ v_0 > \dfrac{3L}{7}\sqrt{\dfrac{g}{2h}}$

(た) この条件は問4の条件とかぶっている (でないとそもそも1回目の衝突が起こらない)