広島大学　2011年第1問

図1のように水平な床の上に質量 M の台車を置き、その上に質量 m の荷物をのせた。台車の表面は常に床または斜面から離れることなく接し、台車と床および台車と斜面の間の摩擦や、台車と荷物に働く空気抵抗は無視できるものとする。また、荷物と台車の間の静止摩擦係数を μ、重力加速度の大きさを g とする。

図1の水平方向右向きに一定の力で台車を引くと、台車と荷物は一体となって動き出した。台車を引く力の大きさを F、荷物と台車の間に働く摩擦力の大きさを f とする。

問1　台車に働く全ての力を、次ページの図中に明瞭な矢印で示せ。ただし、それぞれの矢印には、M、m、μ、g、F、f のうちで必要なものを用いて、力の大きさを記せ。

問2　図1の水平方向右向きを正の向きとし、荷物および台車の加速度の大きさを a とする。荷物と台車それぞれについての運動方程式を記せ。

問3　前問の結果を利用して、摩擦力の大きさ f を M、m、F、μ、g のうちで必要なものを用いて表せ。

台車を引く力を大きくしたところ、引く力の大きさが F_1 になったときに荷物は台車の上を滑りだした。

問4　力の大きさ F_1 を M、m、μ、g を用いて表せ。導き方も記せ。

荷物と台車を最初の位置に戻して静止させた。次に、荷物と台車が一体となって動くような一定の力で、台車を水平方向右向きに t 秒間引いて、斜面にとどく前に放した。台車を引いた力の大きさを F とする。

問5　水平面と角度 θ $(0^\circ<\theta<90^\circ)$ をなす斜面を荷物と台車が一体となって上がっているときに、荷物と台車の間に働く摩擦力の大きさ f を求めよ。導き方も記せ。

問6　床からの高さ h まで、荷物と台車は一体となって上がりきった。このとき、台車を引いた時間 t の条件を求めよ。導き方も記せ。

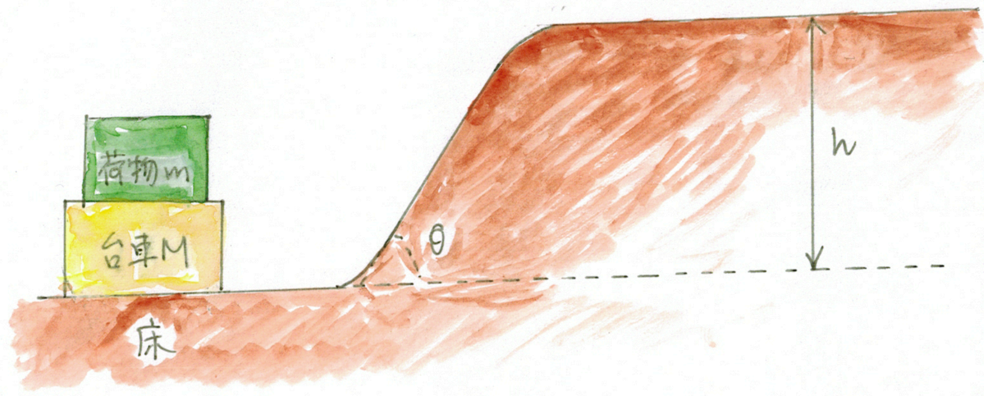
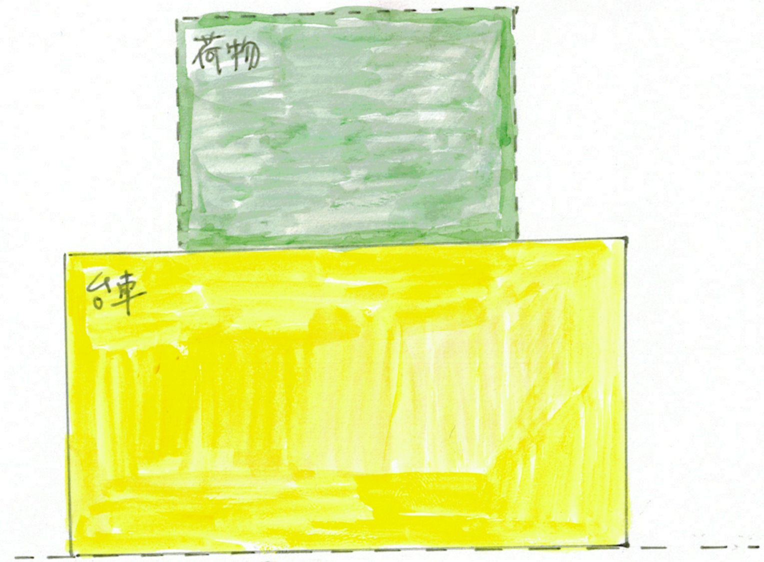


図1

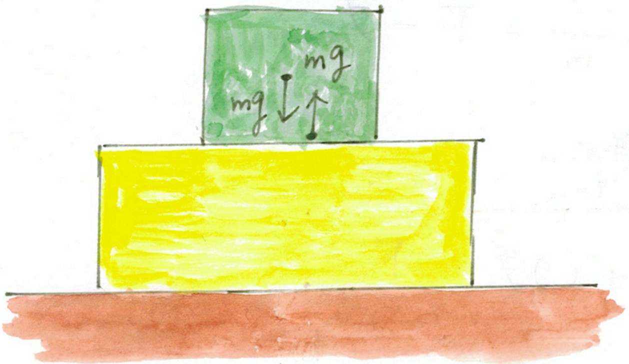


問1　解答欄

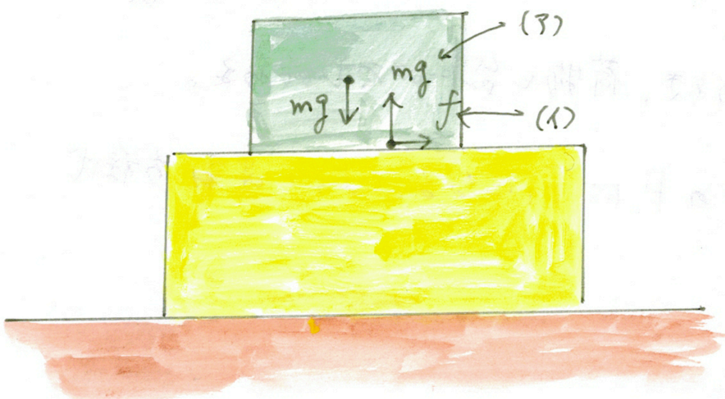
2011 広大 第1問

問1 上の物体(荷物)に働く力から考えてみる。

まず重力、それから荷物は垂直方向に動いていないので垂直抗力が必要



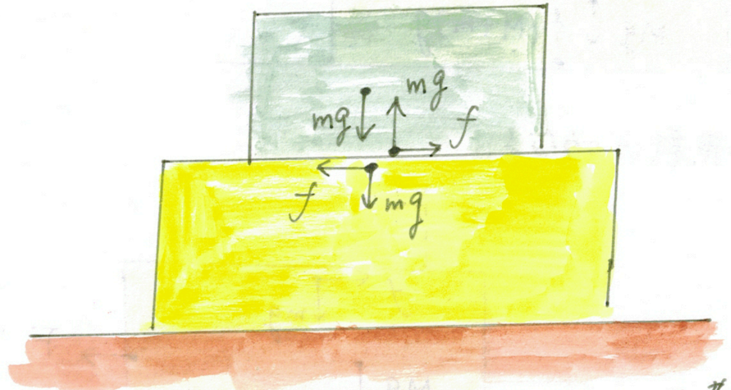
荷物は水平方向には右向きに加速度運動していて、しかも下の物体(台車)との間にはたらくまさつ力以外は、水平方向に力を受けていない。⟶ まさつ力は右向きとわかる。



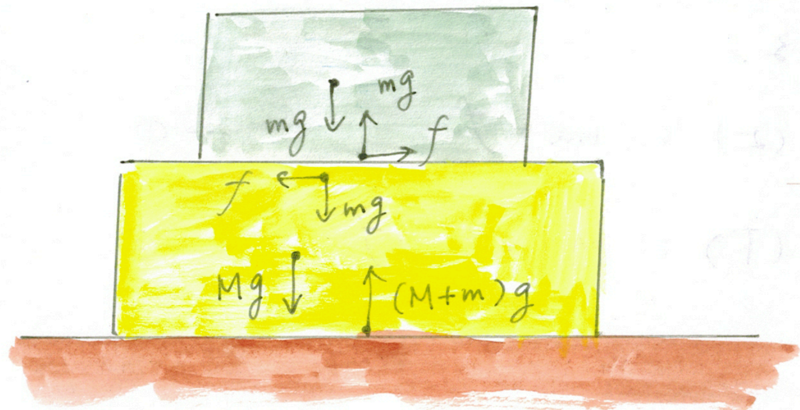
なお、$f=\mu mg$ ではない(出題者がひっかけていますね)。

「静止まさつ係数 μ」はズレだす直前の話です。

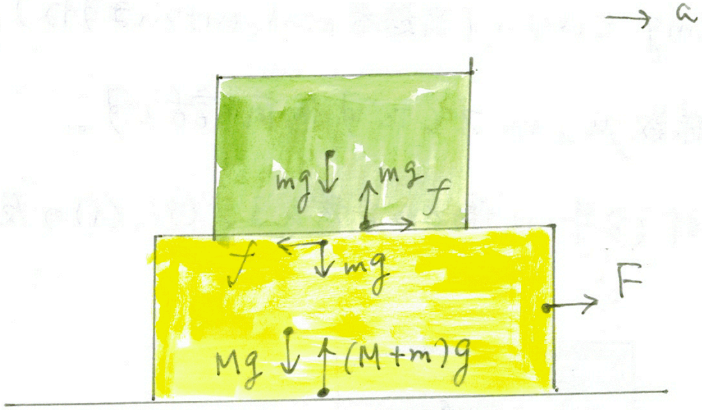
次に、下の物体(台車)に働く力を考える。(ア),(イ)の反作用がある。



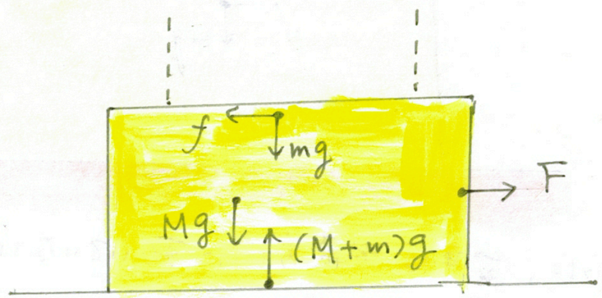
さらに、台車は垂直方向に動いていないことを考慮しながら、重力 Mg と垂直抗力 $(M+m)g$ を書きこむ(そうしないと、垂直方向のベクトル和がゼロにならない)。



さいごに、Fを書きこんで出来あがり。



解答用紙はこうなる。



問2 問1のベクトルで、水平方向のもののみを運動方程式に取り入れる。

荷物(上)：$ma = f$ …①

台車(下)：$Ma = F - f$ …②

問3 aを解答に使ってはいけないので、①と②を aとfについての連立方程式とみる。

①より $a = \dfrac{f}{m}$

②に代入 $M \cdot \dfrac{f}{m} = F - f$

これをfについて解く。

$$\left(\frac{M}{m} + 1\right) f = F$$

$$f = \frac{1}{\frac{M}{m} + 1} \cdot F$$

$$= \frac{m}{M + m} F$$

問4 $f = \mu mg$ のとき、荷物と台車がズレ始める。

このとき、②のFがF_1になる。よって運動方程式は、

$$\begin{cases} ma = \mu mg & \cdots ③ \\ Ma = F_1 - \mu mg & \cdots ④ \end{cases}$$

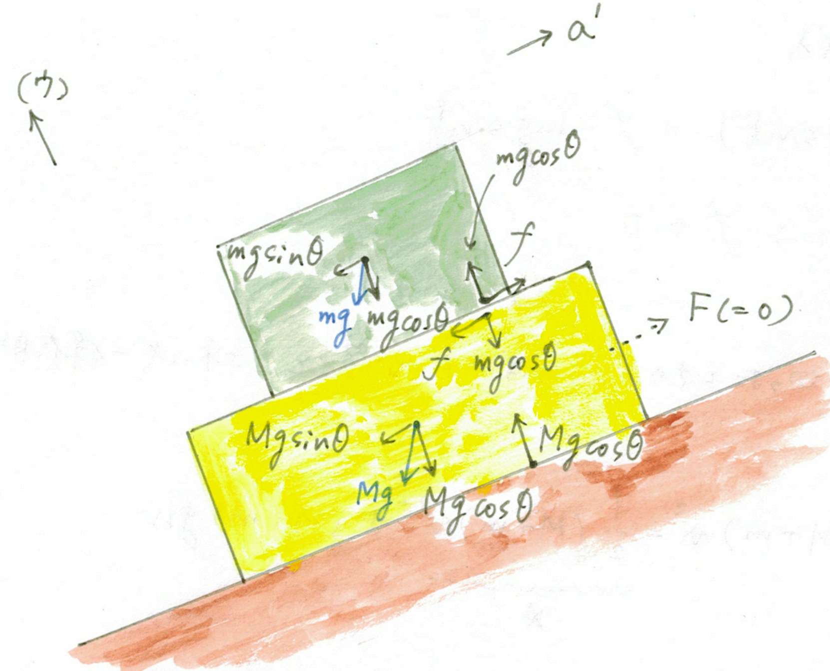
③より $a = \mu g$ 　④に代入 $M\mu g = F_1 - \mu mg$

$$F_1 = \mu Mg + \mu mg$$

μMg の文字の順番だけど、慣習的に無次元数 μ を先に、Mg は Mg の順番で書くのがよいです。

（$f = Ma$ だから $F = Mg$ 的な）

問5　問1と同じように力のベクトルを書いてみる。今度は mg が $mg\cos\theta$ と $mg\sin\theta$ に、Mg が $Mg\cos\theta$ と $Mg\sin\theta$ に分解され、$F = 0$ となる。その結果、垂直抗力もそれぞれ変わってくる。台車と荷物は（ウ）の方向には動いていないことに注意。



従って運動方程式は

$$\begin{cases} \text{荷物（上）} : ma' = f - mg\sin\theta & \cdots ⑤ \\ \text{台車（下）} : Ma' = -Mg\sin\theta - f & \cdots ⑥ \end{cases}$$

これを a' と f についての連立方程式とみて解く。

⑤＋⑥　$(m+M)a' = -mg\sin\theta - Mg\sin\theta$

$$= -(m+M)g\sin\theta$$

$$\therefore a' = -g\sin\theta$$

これを ⑤ に代入

$$m(-g\sin\theta) = f - mg\sin\theta$$

$$\therefore f = 0$$

問6 上がり切ったときの両者の速さを v' とすると、エネルギー保存則から

$$\frac{1}{2}(M+m)v^2 = \underbrace{\frac{1}{2}(M+m)v'^2}_{☆} + (M+m)gh$$

☆の部分は正だから

$$\frac{1}{2}(M+m)v'^2 = \frac{1}{2}(M+m)v^2 - (M+m)gh \geqq 0 \quad \cdots ⑦$$

一方、

$$v = at \quad \cdots ⑧$$

$$(M+m)a = F \quad \cdots ⑨$$

床で、両者を一体とみなしていて、かつFでひっぱっている時の運動方程式

⑦〜⑨からtの条件を求める。

⑨を⑧に代入

$$v = \frac{F}{M+m}t$$

⑦に代入

$$\frac{1}{2}(M+m)\cdot\left(\frac{F}{M+m}t\right)^2 - (M+m)gh \geqq 0$$

$$\left(\frac{F}{M+m}t\right)^2 - 2gh \geqq 0$$

$$\left(\frac{F}{M+m}t\right)^2 \geqq 2gh$$

$$\frac{F}{M+m}t \geqq \sqrt{2gh}$$

$$t \geqq \frac{M+m}{F}\sqrt{2gh}$$