

3

問1 図1のように、厚さ d 、屈折率 $n(n>1)$ のガラス板を角度 ϕ だけ傾けて空気中に置き、水平方向からレーザー光を当てる。レーザー光はガラス表面で屈折し、図中の矢印に沿って進む。ガラスを通過したレーザー光は、直進した場合に比べて上方に x だけずれた。以下の問いに答えなさい。ただし、空気中でのレーザー光の速さを c とする。

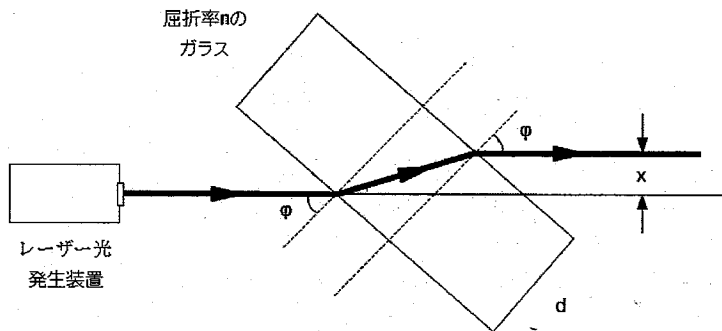


図1

- (1) 赤、青、緑の3色のレーザー光を用いて x を測定したところ、それぞれ異なる値 x_R 、 x_B 、 x_G が得られた。 x_R 、 x_B 、 x_G を小さい順に並べなさい。
- (2) 実験装置の一部に変更を加えると測定値 x が変化する。次のうち x が増加するものをすべて選びなさい。
 - (ア) ガラス板の厚さを半分にする。
 - (イ) ガラス板の代わりに、屈折率のより小さい物質を用いる。
 - (ウ) レーザー光の波長を半分にする。
 - (エ) レーザー光の周波数を2倍にする。
 - (オ) 実験装置全体を水中に入れる。ただし、水の屈折率はガラスの屈折率より小さいものとする。
- (3) レーザー光がガラス板を通過するのに要する時間 t の表式を求め、 c 、 d 、 n および ϕ を用いて表しなさい。
- (4) 角度 ϕ を 45° に固定し x の値を測定した。 x を d と n を用いて表しなさい。

(5) 図2のグラフの中から、屈折率 n の関数 $x(n)$ の概形として正しいものを選びなさい。ただし $\phi=45^\circ$ とする。

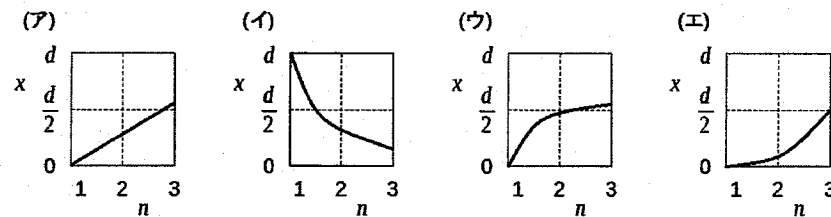


図2

問2 問1で用いたガラス板を垂直に立て、間隔 l の二重スリットをガラス板の光源側表面にすき間なく置いたところ、反対側のガラスの表面に干渉じまがあらわれた(図3)。以下の問いに答えなさい。ただし、スリット間の中点を原点 $x=0$ とし、 d に比べて十分小さい原点付近の領域だけを考える。 l は d に比べて十分小さく、2つのスリットには同位相のレーザー光が均等に当たるものとする。

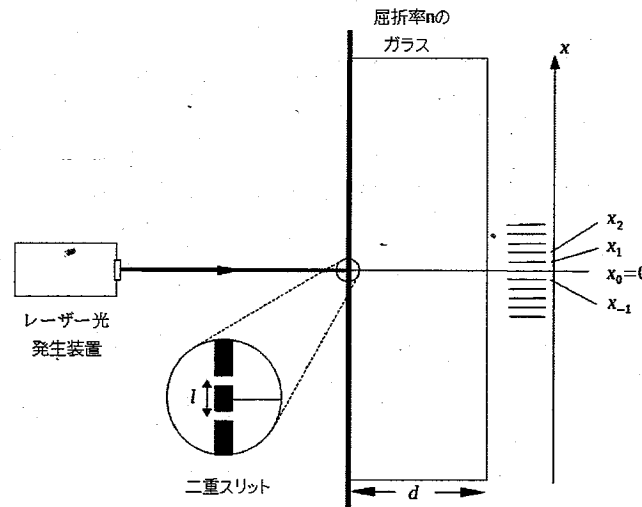


図3

- (1) 各スリットを通過して位置 x に到達する 2 つのレーザー光の光路差 Δ を x 、 l および d を用いて表しなさい。ただし、 $|z|$ が十分小さいときに成り立つ近似式 $(1+z)^n \approx 1+nz$ を用いてもよい。
- (2) 明線の位置 $x_m (m=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ を l 、 d 、 n および空気中でのレーザー光の波長 λ を用いて表しなさい。ただし、 $x_0=0$ とする。
- (3) $d=100\text{mm}$ 、 $l=10.0\ \mu\text{m}$ とする。赤色(波長: $0.750\ \mu\text{m}$)と青色(波長: $0.450\ \mu\text{m}$)のレーザー光を用いたとき、 x_1 の測定値は、それぞれ $5.14\ \text{mm}$ と $3.04\ \text{mm}$ であった。屈折率 n (赤) および n (青) の値を求めなさい。

4

図 1(a) のように、断熱材からなる内径断面積 $S [\text{m}^2]$ の円筒形シリンダーと質量 $M [\text{kg}]$ のピストンが水平に設置してある。ピストンはシリンダー内を円滑に動き、シリンダーとの間の摩擦は無視できる。シリンダーの両端にはピストンにより隔たれた気密性の高い 2 つの空間 (A 室および B 室) が存在し、それぞれに気体を封入することができる。また、B 室には通電加熱によるヒーターが設置してあり、必要に応じて気体を加熱することができる。いま、単原子分子からなる理想気体を両室に 1 モルずつ封入したときピストンはシリンダーの中央でつり合い、その時の両室の圧力、体積、温度はそれぞれ P_0 [Pa]、 V_0 [m^3]、 T_0 [K] であった。シリンダーの中央を座標原点 O として A 室側へのピストンの変位 x [m] を正とし、ピストンの運動は可逆的になされるものとして、以下の問いに答えなさい。

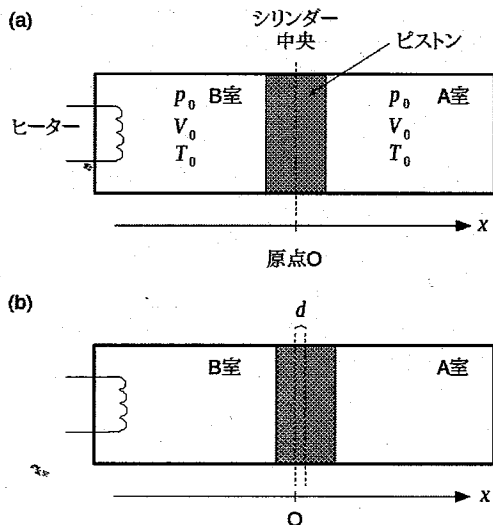


図 1

問 1 外部との熱のやり取りを行わない気体の状態変化を断熱変化と呼ぶ。その際、圧力 P と体積 V との間には、気体の種類に依存する指数 $b (b > 1)$ を用いて、次の関係が成り立つことが知られている。

$$pV^b = \text{一定}$$

いま、図 1(b) のように、ピストンを原点 O から A 室側へ距離 d [m] だけゆっくり移動させたあと静かに解放すると、ピストンは単振動を始めた。ピストンの運動について述べた以下の文章中の空白を適当な数字あるいは文字で埋めなさい。ただし、解答に用いることのできる文字は S 、 M 、 P_0 、 V_0 、 b 、 x 、 d である。

ピストンが任意の変位 x [m] のときの A 室の体積を x を用いて表すと ① [m^3] となり、このときの A 室の圧力は ② [Pa] と表される。一般に、変数 $|z|$ が 1 に比べて十分小さいとき、 $(1+nz)^n \approx 1+nz$ の近似式が成り立つことが知られている。いま、初期状態からの体積変化量が V_0 に比べて十分小さいことを考慮すると、② は ③ [Pa] のように近似することができる。この近似のもとに、B 室の圧力は ④ [Pa] となる。これら 2 つの圧力を用い、ピストンの加速度を a [m/s^2] として運動方程式をたてると、 $Ma =$ ⑤ となる。得られた運動方程式から、ピストンが角振動数 ⑥ [rad/s] の単振動を行い、周期 t_0 は ⑦ [s] であることがわかる。また、ピストンは x が ⑧ [m] のときに最大の速さ ⑨ [m/s] になる。

問 2 次に、ピストンを A 室側へ大きく移動させ、A 室の体積を $\frac{V_0}{2}$ にした。

(1) ピストンを移動した後の A 室および B 室の圧力および温度を求めなさい。

再び、ピストンを原点 O で静止した状態に戻し、B 室に設置されているヒーターに通電することにより、B 室内の気体を一様に加熱した。加熱の進行に伴いピストンはゆっくりと A 室側へ移動し、A 室の体積がちょうど $\frac{V_0}{2}$ になった時点で加熱を止めた。

(2) 加熱後の A 室および B 室の圧力および温度を求めなさい。

(3) ヒーターから B 室に投入された熱量、ならびにピストンを通して B 室の気体がした仕事を求めなさい。ただし、必要であれば気体の熱容量 C [J/K] を用いなさい。

問3 A室内は単原子分子の理想気体のまま、B室内を1モルの二原子分子からなる理想気体に置き換えた。B室の気体を置き換えたほかは、問1とすべて同じ条件のもとに微小振動させた。次の

問いに答えなさい。なお、単原子分子および二原子分子からなる理想気体の指数 b は、それぞれ $\frac{5}{3}$ 、

$\frac{7}{5}$ である。

(1) A室およびB室の圧力と体積の関係を表した図2のグラフの中から、最も適切なものを1つ選びなさい。

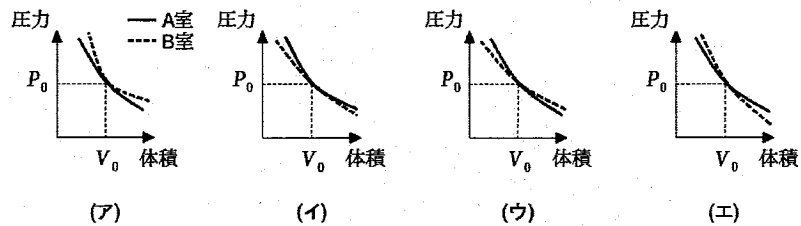


図2

(2) ピストンの振動の様子を表した図3のグラフの中から、最も適切なものを1つ選びなさい。ただし、図3中の t_0 、 t_1 、 t_2 は周期を表し、このうち t_0 は問1中の⑦の周期を表す。

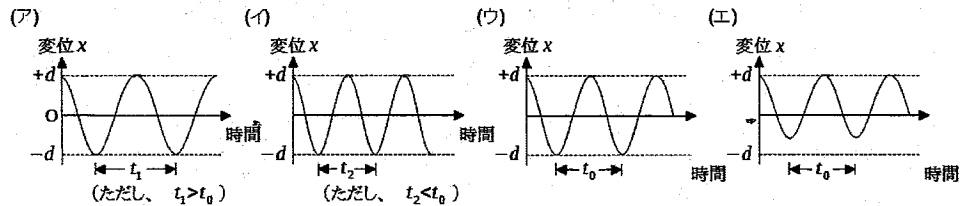
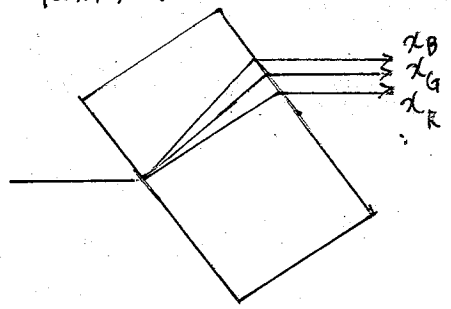


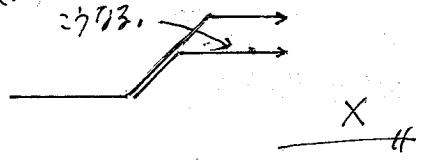
図3

3 問(1) 青い(波長の短い)光ほどよく屈折する。

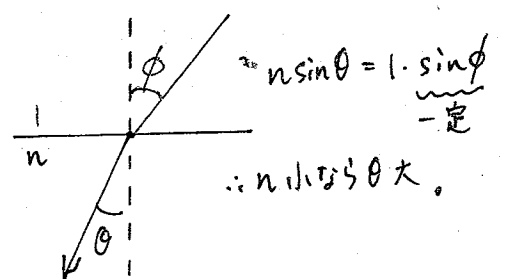


なお、ガラス板を出た光は、入った光と平行になる。ガラス板に入る前と出た後の屈折率は変わらないので(受験テーク)。

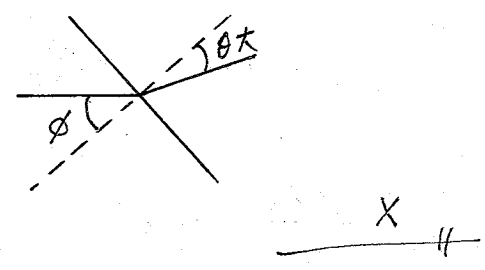
(2) (3) ガラス板の厚みを半分にするとこうなる。



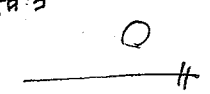
(1) 入射部分での屈折の法則は



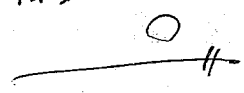
問題の図に合わせると



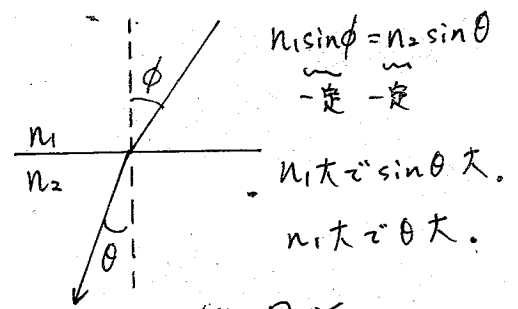
(1) 問(1)の λ_B に相当



(2) 問(1)の λ_B に相当

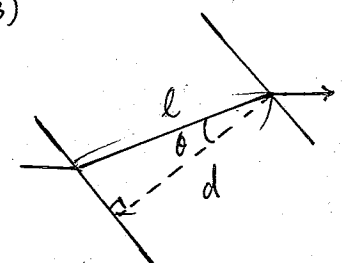


(1) 入射部分での屈折の法則は



(1) と同じく

(3)



図の三角形から

$$l = \frac{d}{\cos \theta} \dots \textcircled{1}$$

屈折の法則より

$$n \sin \theta = 1 \cdot \sin \phi \dots \textcircled{2}$$

ガラス中の光速 c' は

$$c' = \frac{c}{n} \dots \textcircled{3}$$

以上より、求める時間 t は

$$t = \frac{l}{c'} = \frac{d}{\cos \theta \cdot \frac{c}{n}} = \frac{d}{(\sqrt{1 - \sin^2 \theta}) \frac{c}{n}}$$

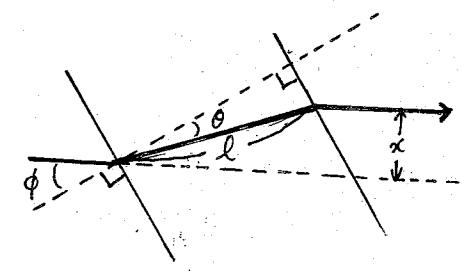
$$= \frac{d}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \phi}{n^2}} \cdot \frac{c}{n}}$$

ここで式変形でもバツではないが、読者のために普通は下でやる。

$$= \frac{n^2}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \phi}} \cdot \frac{d}{c}$$

無次元量 時間の次元

(4)



図より

$$x = l \sin(\phi - \theta)$$

$$= \frac{d}{\cos \theta} (\sin \phi \cos \theta - \cos \phi \sin \theta)$$

$$= d (\sin \phi - \cos \phi \tan \theta) \dots \textcircled{1}$$

と3c"

$$\tan^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$\tan \theta = \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{\sin^2 \phi}{n^2}}{1 - \frac{\sin^2 \phi}{n^2}}}$$

(\because 前問(3)②)

$$= \sqrt{\frac{\sin^2 \phi}{n^2 - \sin^2 \phi}}$$

3 問 1 (4) フクキ

$$\tan \theta = \sqrt{\frac{\sin^2 \phi}{n^2 - \sin^2 \phi}}$$

であるから ①式は

$$x = d (\sin \phi - \cos \phi \tan \theta)$$

$$= d \left(\sin \phi - \cos \phi \sqrt{\frac{\sin^2 \phi}{n^2 - \sin^2 \phi}} \right)$$

よび、 $\sin \phi = \cos \phi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ を代入して

$$x = d \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{1}{n^2 - 1/2}} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} d \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2n^2 - 1}} \right)$$

(5) $x(1) = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \frac{\sqrt{2}}{2} d \quad (7)$$

問 2 (1) 問題文に n を使えと書かれていないので、幾何学的な距離差を求める。 $(n$ を掛ける必要はない)
= 出しおきな...

$$\Delta = \sqrt{d^2 + \left(x + \frac{l}{2}\right)^2} - \sqrt{d^2 + \left(x - \frac{l}{2}\right)^2}$$

$$= d \left\{ 1 + \left(\frac{x + \frac{l}{2}}{d}\right)^2 \right\}^{1/2}$$

$$- d \left\{ 1 + \left(\frac{x - \frac{l}{2}}{d}\right)^2 \right\}^{1/2}$$

$$\approx d \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x + \frac{l}{2}}{d}\right)^2 \right\}$$

$$- d \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x - \frac{l}{2}}{d}\right)^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{lx}{d} - \left(-\frac{1}{2} \frac{lx}{d}\right)$$

$$= \frac{lx}{d}$$

(2) 明線の条件は

$$n \cdot |r_2 - r_1| = \frac{\lambda}{2} \times \text{偶数}$$

$$n \cdot \frac{lx_m}{d} = m\lambda$$

$$x_m = \frac{md\lambda}{nl}$$

(3) $n(\text{赤}) \approx 1.46, n(\text{青}) \approx 1.48$

4 問 1 ① $V_0 - Sx$

(2) 断熱変化の式より

$$P_A (V_0 - Sx)^b = P_0 V_0^b$$

$$\therefore P_A = P_0 \left(\frac{V_0}{V_0 - Sx} \right)^b$$

$$(3) P_A = P_0 \left(1 - \frac{Sx}{V_0} \right)^{-b}$$

$$\approx P_0 \left(1 + b \frac{Sx}{V_0} \right)$$

④ B室の体積は

$$V_0 + Sx \quad [m^3]$$

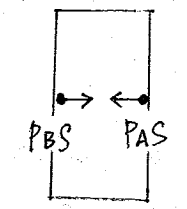
断熱変化の式より

$$P_B (V_0 + Sx)^b = P_0 V_0^b$$

$$\therefore P_B = P_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + Sx} \right)^b$$

$$\approx P_0 \left(1 - b \frac{Sx}{V_0} \right)$$

⑤



$$F = PS$$

運動方程式は

$$Ma = P_B S - P_A S$$

以下次ページ

4 (1) ⑤ つぎ

$$Ma = P_0 S \left(1 - b \frac{Sx}{V_0}\right)$$

$$- P_0 S \left(1 + b \frac{Sx}{V_0}\right)$$

$$= -2b P_0 \frac{S^2 x}{V_0}$$

⑥ 単振動の運動方程式

$$F = -M\omega^2 x$$

と ⑤ の結果を比較

$$M\omega^2 = 2b \frac{P_0 S^2}{V_0}$$

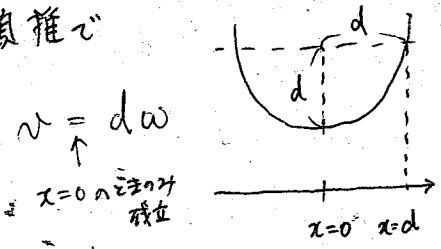
$$\omega = S \sqrt{\frac{2b P_0}{M V_0}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$= \frac{1}{2\pi S} \sqrt{\frac{M V_0}{2b P_0}}$$

⑧ $x=0$ [cm] のとき 振動の中心
(つぎ合いの位置で速度最大)

⑨ 円運動の式「 $v = r\omega$ 」の類推で



$$v = d\omega$$

$$= dS \sqrt{\frac{2b P_0}{M V_0}}$$

問題 2 (1) 状態方程式

$$pV = nRT$$

「 $pV^b = \text{一定}$ 」の縛りがかかると

p, V, T が動くと考えろ。

求める圧力, 温度を P_A', P_B', T_A', T_B' とおくと.

$$P_0 V_0^b = P_A' V_A'^b \text{ より}$$

$$P_A' = P_0 \left(\frac{V_0}{V_A'}\right)^b = P_0 \left(\frac{V_0}{\frac{V_0}{2}}\right)^b$$

$$= 2^b P_0$$

$$P_0 V_0^b = P_B' V_B'^b \text{ より}$$

$$P_B' = P_0 \left(\frac{V_0}{V_B'}\right)^b$$

$$= P_0 \left(\frac{V_0}{\frac{3}{2}V_0}\right)^b$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^b P_0$$

$$T_A' = \frac{P_A' V_A'}{nR} \text{ より}$$

$$T_A' = \frac{2^b P_0 \cdot \frac{V_0}{2}}{nR}$$

$$= 2^{b-1} \frac{P_0 V_0}{nR}$$

$$= 2^{b-1} T_0$$

$$T_B' = \frac{P_B' V_B'}{nR} \text{ より}$$

$$T_B' = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^b P_0 \cdot \frac{3}{2} V_0}{nR}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{b-1} \frac{P_0 V_0}{nR}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{b-1} T_0$$

(2) (1) では A 室・B 室共に

断熱変化であったが, (2) では B 室は一般の変化 (等温, 等圧, 等積, 断熱のどれでもない変化),

A 室は断熱変化となっている。

4 問2(2)のつぎ

従って A 室の圧力と温度は (1) と同じ $2^b p_0$, $2^{b-1} T_0$ であり、
B 室の圧力は A 室と同じ $2^b p_0$ である。また、

B 室の温度 T_B'' は

$$T_B'' = \frac{P_B'' V_B''}{nR}$$

$$= \frac{2^b p_0 \cdot \frac{3}{2} V_0}{nR}$$

$$= 2^b \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{p_0 V_0}{nR}$$

$$= 2^b \cdot \frac{3}{2} \cdot T_0$$

$$= 3 \cdot 2^{b-1} T_0$$

である。

(3) 一般の変化 (等温・等圧・定積のどれでもない変化) が B 室に入っているので、エネルギー保存 (熱力学第一法則) で解く他ない。
単原子分子理想気体の内部エネルギー U は

$$U = \frac{3}{2} nRT \quad \left(= \frac{3}{2} pV \right)$$

$PV = nRT$ より

であるから、温度変化 ΔT と内部エネルギー変化 ΔU の関係は

$$\Delta U = \frac{3}{2} nR \Delta T$$

である。これと、物体の熱容量 C の定義

$$Q = \underbrace{m c}_{\text{質量}} \Delta T$$

小文字・比較

$$= \underbrace{C}_{\text{熱容量}} \Delta T$$

と比べてみて

$$C = \frac{3}{2} nR,$$

$$U = C T$$

を得る。($Q = \Delta U + W$ があるので、等圧・等積変化では熱容量は変化するのではないかと思うかも知れない。本問を解く上では、気にしなくて良い。そこを考えると熱容量の「より厳密な定義が必要になる。」)

これらの結果を用いると、エネルギー保存則は熱容量 C を使って

$$\underbrace{C T_0}_{\text{A 前の内部エネルギー}} + \underbrace{C T_0}_{\text{B 前の内部エネルギー}} + \underbrace{Q}_{\text{求める熱量}}$$

$$= \underbrace{C T_A''}_{\text{A 後の内部エネルギー}} + \underbrace{C T_B''}_{\text{B 後の内部エネルギー}}$$

$$\therefore C T_0 + C T_0 + Q$$

$$= C \cdot 2^{b-1} T_0 + C \cdot 3 \cdot 2^{b-1} T_0$$

(A 前の結果)

$$\therefore Q = C \cdot 2^{b-1} T_0 + C \cdot 3 \cdot 2^{b-1} T_0 - 2 C T_0$$

$$= (2^{b-1} + 3 \cdot 2^{b-1} - 2) C T_0$$

$$= (2^{b+1} - 2) C T_0$$

ピストンを通じて B 室の気体がした仕事 W は A 室の気体がした仕事に等しく。

$$W = \underbrace{C T_A''}_{\text{A 後の内部エネルギー}} - \underbrace{C T_0}_{\text{A 前の内部エネルギー}}$$

$$= C \cdot 2^{b-1} T_0 - C T_0$$

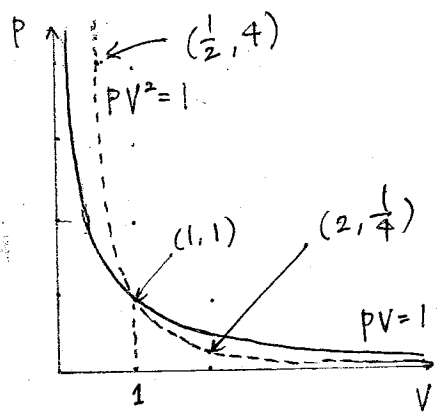
$$= (2^{b-1} - 1) C T_0$$

4 問3 (1)

A室: $PV^{\frac{5}{3}} = \text{一定}$

B室: $PV^{\frac{7}{5}} = \text{一定}$

比べにくいので $PV=1$ と $PV^2=1$ と比べる。



となる。この類推で (7)

(2) 問1 ⑦ まじを新しい条件でやり直してみる。A室の b と b_A , B室の b と b_B と比べる。

$P_A \doteq P_0 \left(1 + b_A \frac{Sx}{V_0} \right)$

$P_B \doteq P_0 \left(1 - b_B \frac{Sx}{V_0} \right)$

運動方程式

$Ma = P_B S - P_A S$

$= -P_0 b_B \frac{Sx}{V_0}$

$- P_0 b_A \frac{Sx}{V_0}$

$= - (b_A + b_B) P_0 \frac{Sx}{V_0}$

$ab \rightarrow a$ と b と $3ab$
 $b_A + b_B$ は置換される。

$\therefore \tau = \frac{1}{2\pi S} \sqrt{\frac{MV_0}{(b_A + b_B) P_0}}$

問1の場合 $b \doteq \frac{5}{3} \therefore 2b = \frac{10}{3}$

問3の場合 $b_A + b_B = \frac{5}{3} + \frac{7}{5} = \frac{46}{15}$

$\frac{10}{3} > \frac{46}{15}$ より 振動の周期は

問3の方が長い

答 (3)

以下余白