2009年 愛媛大学

3

問1 図1のように、厚さ d、屈折率 $n(n>1)$ のガラス板を角度 ϕ だけ傾けて空気中に置き、水平方向からレーザー光を当てる。レーザー光はガラス表面で屈折し、図中の矢印に沿って進む。ガラスを通過したレーザー光は、直進した場合にくらべて上方に x だけずれた。以下の問いに答えなさい。ただし、空気中でのレーザー光の速さを c とする。

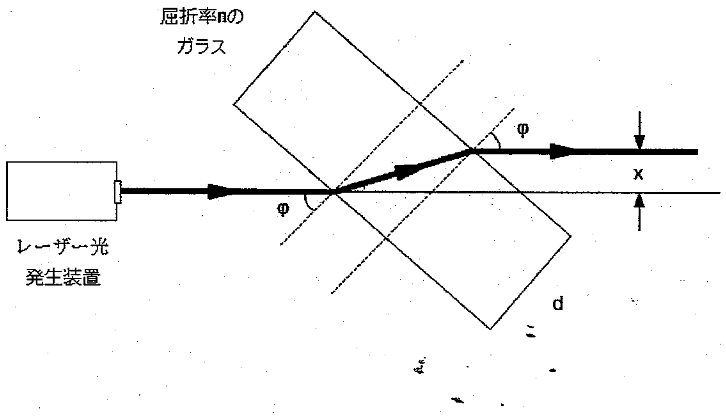


図1

(1) 赤、青、緑の3色のレーザー光を用いて x を測定したところ、それぞれ異なる値 x_R、x_B、x_G が得られた。x_R、x_B、x_G を小さい順に並べなさい。

(2) 実験装置の一部に変更を加えると測定値 x が変化する。次のうち x が増加するものをすべて選びなさい。

(ア) ガラス板の厚さを半分にする。

(イ) ガラス板の代わりに、屈折率のより小さい物質を用いる。

(ウ) レーザー光の波長を半分にする。

(エ) レーザー光の周波数を2倍にする。

(オ) 実験装置全体を水中に入れる。ただし、水の屈折率はガラスの屈折率より小さいものとする。

(3) レーザー光がガラス板を通過するのに要する時間 t の表式を求め、c、d、n および ϕ を用いて表しなさい。

(4) 角度 ϕ を 45° に固定し x の値を測定した。x を d と n を用いて表しなさい。

(5) 図2のグラフの中から、屈折率 n の関数 $x(n)$ の概形として正しいものを選びなさい。ただし $\phi=45°$ とする。

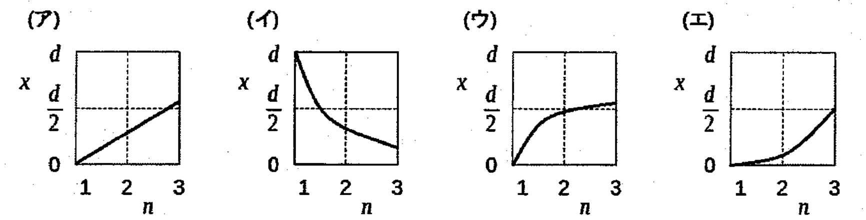


図2

問2 問1で用いたガラス板を垂直に立て、間隔 l の二重スリットをガラス板の光源側表面にすき間なく置いたところ、反対側のガラスの表面に干渉じまがあらわれた（図3）。以下の問いに答えなさい。ただし、スリット間の中点を原点 $x=0$ とし、d に比べて十分小さい原点付近の領域だけを考える。l は d にくらべて十分小さく、2つのスリットには同位相のレーザー光が均等にあたるものとする。

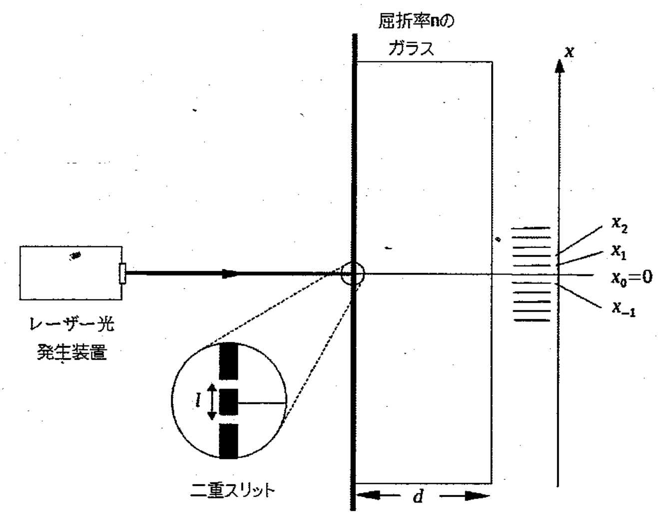


図3

(1) 各スリットを通過して位置 x に到達する2つのレーザー光の光路差 Δ を x 、l および d を用いて表しなさい。ただし、$|z|$ が十分小さいときに成り立つ近似式 $(1+z)^{\alpha} \simeq 1+\alpha z$ を用いてもよい。

(2) 明線の位置 $x_m(m=0,\pm1,\pm2\cdots)$ を l 、d 、n および空気中でのレーザー光の波長 λ を用いて表しなさい。ただし、$x_0=0$ とする。

(3) $d=100mm$ mm、$l=10.0$ μm とする。赤色(波長: 0.750 μm)と青色(波長: 0.450 μm)のレーザー光を用いたとき、x_1 の測定値は、それぞれ 5.14 mm と 3.04 mm であった。屈折率 n (赤) および n (青) の値を求めなさい。

4

図1(a)のように、断熱材からなる内径断面積 S [m^2]の円筒形シリンダーと質量 M [kg]のピストンが水平に設置してある。ピストンはシリンダー内を円滑に動き、シリンダーとの間の摩擦は無視できる。シリンダーの両端にはピストンにより隔たれた気密性の高い2つの空間(A室およびB室)が存在し、それぞれに気体を封入することができる。また、B室には通電加熱によるヒーターが設置してあり、必要に応じて気体を加熱することができる。いま、単原子分子からなる理想気体を両室に1モルずつ封入したときピストンはシリンダーの中央でつり合い、その時の両室の圧力、体積、温度はそれぞれ P_0 [Pa]、V_0 [m^3]、T_0 [K]であった。シリンダーの中央を座標原点Oとして A室側へのピストンの変位 x [m]を正とし、ピストンの運動は可逆的になされるものとして、以下の問いに答えなさい。

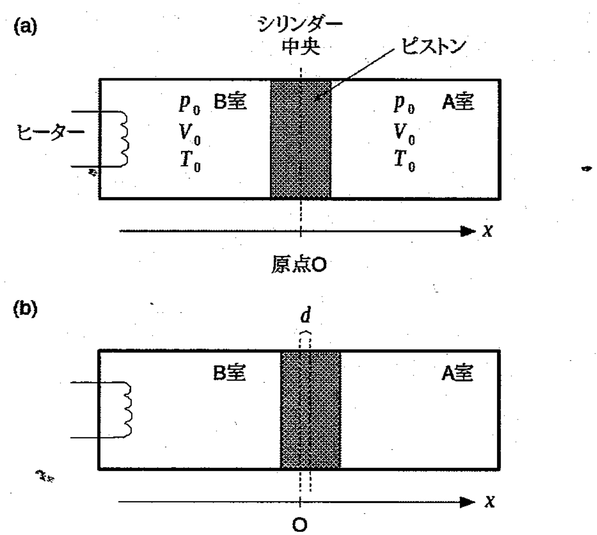


図1

問1 外部との熱のやり取りを行わない気体の状態変化を断熱変化と呼ぶ。その際、圧力 P と体積 V との間には、気体の種類に依存する指数 $b(b>1)$ を用いて、次の関係が成り立つことが知られている。

$$pV^b=\text{一定}$$

いま、図1(b)のように、ピストンを原点Oから A室側へ距離 d [m]だけゆっくり移動させたあと静かに解放すると、ピストンは単振動を始めた。ピストンの運動について述べた以下の文章中の空白を適当な数字あるいは文字で埋めなさい。ただし、解答に用いることのできる文字は S 、M 、P_0、V_0、b 、x 、d である。

ピストンが任意の変位 x [m]のときの A室の体積を x を用いて表すと[①][m^3]となり、このときの A室の圧力は[②][Pa]と表される。一般に、変数 $|z|$ が1に比べて十分小さいとき、$(1+nz)^n \simeq 1+nz$ の近似式が成り立つことが知られている。いま、初期状態からの体積変化量が V_0 に比べて十分小さいことを考慮すると、②は[③][Pa]のように近似することができる。この近似のもとに、B室の圧力は[④][Pa]となる。これら2つの圧力を用い、ピストンの加速度を a [m/s^2]として運動方程式をたてると、$Ma=$[⑤]となる。得られた運動方程式から、ピストンが角振動数[⑥][rad/s]の単振動を行い、周期 t_0 は[⑦][s]であることがわかる。また、ピストンは x が[⑧][m]のときに最大の速さ[⑨][m/s]になる。

問2 次に、ピストンを A室側へ大きく移動させ、A室の体積を $\dfrac{V_0}{2}$ にした。

(1) ピストンを移動した後の A室および B室の圧力および温度を求めなさい。

再び、ピストンを原点Oで静止した状態に戻し、B室に設置されているヒーターに通電することにより、B室内の気体を一様に加熱した。加熱の進行に伴いピストンはゆっくりと A室側へ移動し、A室の体積がちょうど $\dfrac{V_0}{2}$ になった時点で加熱を止めた。

(2) 加熱後の A室および B室の圧力および温度を求めなさい。

(3) ヒーターから B室に投入された熱量、ならびにピストンを通して B室の気体がした仕事を求めなさい。ただし、必要であれば気体の熱容量 C [J/K]を用いなさい。

問 3　A 室内は単原子分子の理想気体のまま、B 室内を 1 モルの二原子分子からなる理想気体に置き換えた。B 室の気体を置き換えたほかは、問 1 とすべて同じ条件のもとに微小振動させた。次の問いに答えなさい。なお、単原子分子および二原子分子からなる理想気体の指数 b は、それぞれ $\frac{5}{3}$、$\frac{7}{5}$ である。

(1)　A 室および B 室の圧力と体積の関係を表した図 2 のグラフの中から、最も適切なものを 1 つ選びなさい。

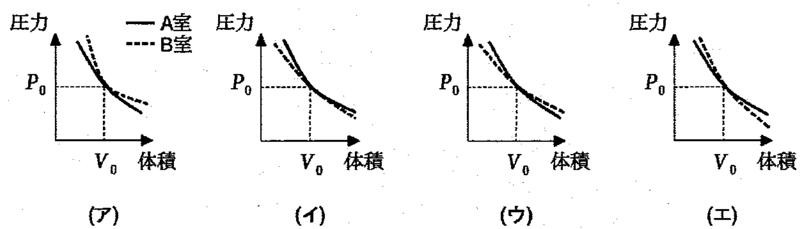


図 2

(2)ピストンの振動の様子を表した図 3 のグラフの中から、最も適切なものを 1 つ選びなさい。ただし、図 3 中の t_0、t_1、t_2 は周期を表し、このうち t_0 は問 1 中の⑦の周期を表す。

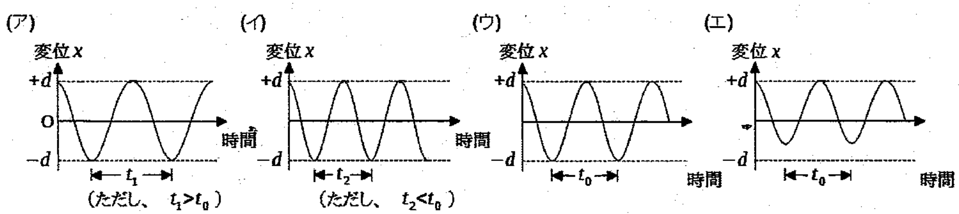
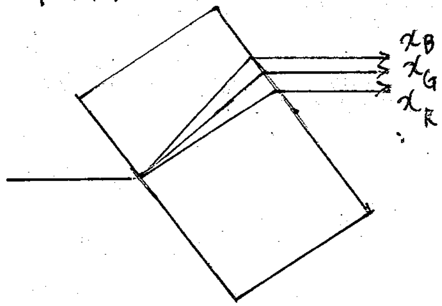


図 3

広島あおば物理塾
(082)274-9555

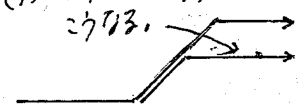
愛媛大 2009 前期

3 問1(1) 青い(波長の短い)光ほどよく屈折する。



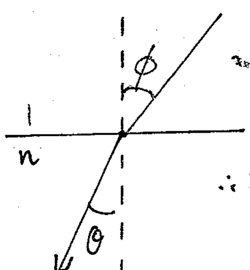
なお，ガラス板を出た光は，入った光と平行になる。ガラス板に入る前と出た後の屈折率は変わらないので(受験テクニック)。

(2) (ア) ガラス板の厚みを半分にするとこうなる。



×

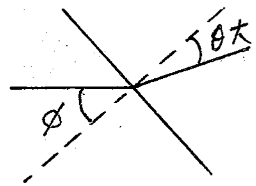
(イ) 入射部分での屈折の法則は



$n\sin\theta = 1\cdot\underbrace{\sin\phi}_{一定}$

∴ n小ならθ大。

問題の図に合わせると



×

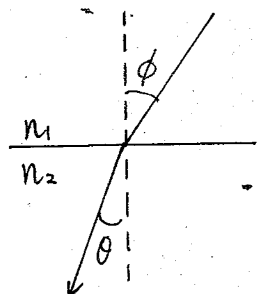
(ウ) 問1(1)のx_Bに相当

○

(エ) 問(1)のx_Bに相当

○

(オ) 入射部分での屈折の法則は



$\underbrace{n_1}_{一定}\sin\phi = \underbrace{n_2}_{一定}\sin\theta$

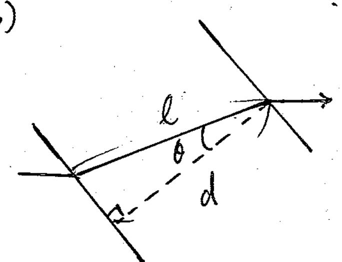
n_1大で$\sin\theta$大。

n_1大でθ大。

(イ)と同じく

×

(3)



図の三角形から

$$l = \frac{d}{\cos\theta} \quad \cdots ①$$

屈折の法則より

$$n\sin\theta = 1\cdot\sin\phi \quad \cdots ②$$

ガラス中の光速c'は

$$c' = \frac{c}{n} \quad \cdots ③$$

以上より，求める時間tは

$$t = \frac{l}{c'} = \frac{d}{\cos\theta\cdot\frac{c}{n}}$$

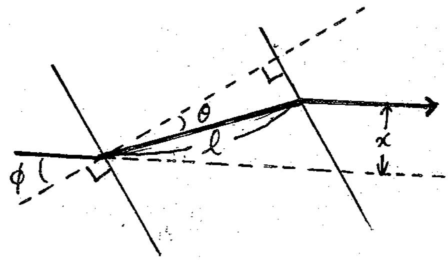
$$= \frac{d}{\left(\sqrt{1-\sin^2\theta}\right)\frac{c}{n}}$$

$$= \frac{d}{\sqrt{1-\frac{\sin^2\phi}{n^2}}\cdot\frac{c}{n}}$$

ここまでの式変形でもバツではないが，読む人のために書面は下までやる。

$$= \underbrace{\frac{n^2}{\sqrt{n^2-\sin^2\phi}}}_{無次元量}\cdot\underbrace{\frac{d}{c}}_{時間の次元}$$

(4)



図より

$$x = l\sin(\phi-\theta)$$

$$= \frac{d}{\cos\theta}(\sin\phi\cos\theta - \cos\phi\sin\theta)$$

$$= d(\sin\phi - \cos\phi\tan\theta) \quad \cdots ①$$

ところで

$$\tan^2\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\tan\theta = \sqrt{\frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{\sin^2\phi}{n^2}}{1-\frac{\sin^2\phi}{n^2}}}$$

(∵ 前問(3)②)

$$= \sqrt{\frac{\sin^2\phi}{n^2-\sin^2\phi}}$$

愛媛大 2009 前期

3 問1 (4) つづき

$$\tan\theta = \sqrt{\frac{\sin^2\phi}{n^2-\sin^2\phi}}$$

であるから①式は

$$x = d\left(\sin\phi - \cos\phi\tan\theta\right)$$

$$= d\left(\sin\phi - \cos\phi\sqrt{\frac{\sin^2\phi}{n^2-\sin^2\phi}}\right)$$

となる。$\sin\phi = \cos\phi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ を代入して

$$x = d\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{n^2-\frac{1}{2}}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}d\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2n^2-1}}\right)$$

(5) $x(1) = 0$

$\lim_{n\to\infty} x(n) = \frac{\sqrt{2}}{2}d$ より (ウ)

問2 (1) 問題文にnを使えと書かれていないので，幾何学的な距離差を求める。(nを掛ける必要はない)

これしか出せない…。

$$\Delta = \sqrt{d^2+\left(x+\frac{l}{2}\right)^2} - \sqrt{d^2+\left(x-\frac{l}{2}\right)^2}$$

$$= d\left\{1+\left(\frac{x+\frac{l}{2}}{d}\right)^2\right\}^{1/2} - d\left\{1+\left(\frac{x-\frac{l}{2}}{d}\right)^2\right\}^{1/2}$$

$$\fallingdotseq d\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{x+\frac{l}{2}}{d}\right)^2\right\} - d\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{x-\frac{l}{2}}{d}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{lx}{d} - \left(-\frac{1}{2}\frac{lx}{d}\right)$$

$$= \frac{lx}{d}$$

(2) 明線の条件は

$$n\cdot|r_2-r_1| = \frac{\lambda}{2}\times 偶数$$

$$n\cdot\frac{l x_m}{d} = m\lambda$$

$$x_m = \frac{md\lambda}{nl}$$

(3) $n(赤) \fallingdotseq 1.46$, $n(青) \fallingdotseq 1.48$

4 問1 ① $V_0 - Sx$

② 断熱変化の式より

$$\underbrace{P_A(V_0-Sx)^b}_{後} = \underbrace{P_0V_0^b}_{前}$$

$$\therefore P_A = P_0\left(\frac{V_0}{V_0-Sx}\right)^b$$

③ $P_A = P_0\left(1-\frac{Sx}{V_0}\right)^{-b}$

$$\fallingdotseq P_0\left(1+b\frac{Sx}{V_0}\right)$$

④ B室の体積は

$V_0 + Sx$ [m^3]

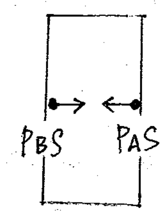
断熱変化の式より

$$P_B(V_0+Sx)^b = P_0V_0^b$$

$$\therefore P_B = P_0\left(\frac{V_0}{V_0+Sx}\right)^b$$

$$\fallingdotseq P_0\left(1-b\frac{Sx}{V_0}\right)$$

⑤



$\boxed{F=PS}$

運動方程式は

$$Ma = P_BS - P_AS$$

以下次ページ

愛媛大 2009 前期

$\boxed{4}$ (1) ⑤つづき

$$Ma = P_0S\left(1 - b\frac{Sx}{V_0}\right) - P_0S\left(1 + b\frac{Sx}{V_0}\right)$$

$$= -2bP_0\frac{S^2x}{V_0}$$

//

⑥ 単振動の運動方程式

$$F = -M\omega^2 x$$

と⑤の結果を比較

$$M\omega^2 = 2b\frac{P_0S^2}{V_0}$$

$$\omega = S\sqrt{\frac{2bP_0}{MV_0}}$$

//

⑦ $$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$= \frac{1}{2\pi S}\sqrt{\frac{MV_0}{2bP_0}}$$

//

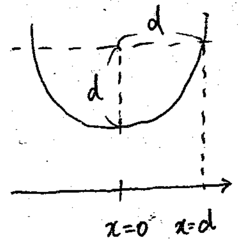
⑧ $x = 0$[m] のとき振動の中心

（つり合いの位置で速度最大）

⑨ 円運動の式「$v = r\omega$」の類推で

$$v = d\omega$$

↑ $x=0$ のときのみ成立



$$= dS\sqrt{\frac{2bP_0}{MV_0}}$$

//

問2 (1) 状態方程式

$$pV = nRT$$

に「pV^b = 一定」の縛りがかかって

p, V, T が動くと考える。

求める圧力，温度を P_A', P_B', T_A', T_B' とすると．

• $P_0V_0^b = P_A'V_A'^b$ より

$$P_A' = P_0\left(\frac{V_0}{V_A'}\right)^b = P_0\left(\frac{V_0}{\frac{V_0}{2}}\right)^b$$

$$= 2^bP_0$$

//

• $P_0V_0^b = P_B'V_B'^b$ より

$$P_B' = P_0\left(\frac{V_0}{V_B'}\right)^b$$

$$= P_0\left(\frac{V_0}{\frac{3}{2}V_0}\right)^b$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^bP_0$$

//

• $T_A' = \dfrac{P_A'V_A'}{nR}$ より ←状態方程式

$$T_A' = \frac{2^bP_0\cdot\frac{V_0}{2}}{nR}$$

$$= 2^{b-1}\frac{P_0V_0}{nR}$$

$$= 2^{b-1}T_0$$

//

• $T_B' = \dfrac{P_B'V_B'}{nR}$ より

$$T_B' = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^bP_0\cdot\frac{3}{2}V_0}{nR}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{b-1}\frac{P_0V_0}{nR}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{b-1}T_0$$

//

(2) (1)ではA室・B室共に断熱変化であったが，(2)ではB室は一般の変化（等温，等圧，等積，断熱のどれでもない変化），A室は断熱変化となっている。

$\boxed{4}$ 問2(2)つづき

従ってA室の圧力と温度は(1)と同じ $2^b p_0$, $2^{b-1} T_0$

であり、

B室の圧力は $\underbrace{\text{A室と同じ}}$ $2^b p_0$ （力のつり合いより：）

である。また、

B室の温度 T_B'' は

$$T_B'' = \frac{p_B'' V_B''}{nR}$$

$$= \frac{2^b p_0 \cdot \frac{3}{2} V_0}{nR}$$

$$= 2^b \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{p_0 V_0}{nR}$$

$$= 2^b \cdot \frac{3}{2} \cdot T_0$$

$$= 3 \cdot 2^{b-1} T_0$$

である。

(3) 一般の変化（等温・等圧・定積のどれでもない変化）がB室に入っているので、エネルギー保存（熱力学第1法則）で解く他ない。

単原子分子理想気体の内部エネルギー U は

$$U = \frac{3}{2} nRT \quad \left(\underset{\substack{\uparrow \\ pV = nRT\text{より}}}{=} \frac{3}{2} pV \right)$$

であるから、温度変化 ΔT と内部エネルギー変化 ΔU の関係は

$$\Delta U = \frac{3}{2} nR \Delta T$$

である。これと、物体の熱容量 C の定義

$$Q = \underset{\text{質量}}{m}\overset{\text{小文字, 比熱}}{c} \Delta T$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{熱容量}}}{C} \Delta T$$

を比べてみて

$$C = \frac{3}{2} nR ,$$

$$U = CT$$

を得る。（$Q = \Delta U + W$ であるので、等圧, 等積変化では熱容量は変わるのではないかと思うかも知れない。本問を解く上では、気にしなくて良い。そこまで考えると熱容量の「より厳密な定義」が必要になる。）

これらの結果を用いると、エネルギー保存則は熱容量 C を使って

$$\underbrace{CT_0}_{\text{A・前の内部エネルギー}} + \underbrace{CT_0}_{\text{B・前の内部エネルギー}} + \underbrace{Q}_{\text{求める熱量}}$$

$$= \underbrace{CT_A''}_{\text{A・後の内部エネルギー}} + \underbrace{CT_B''}_{\text{B・後の内部エネルギー}}$$

$$\therefore CT_0 + CT_0 + Q$$

$$= C \cdot 2^{b-1} T_0 + C \cdot 3 \cdot 2^{b-1} T_0$$

（∵前問の結果）

$$\therefore Q = C \cdot 2^{b-1} T_0 + C \cdot 3 \cdot 2^{b-1} T_0 - 2CT_0$$

$$= (2^{b-1} + 3 \cdot 2^{b-1} - 2) CT_0$$

$$= (2^{b+1} - 2) CT_0$$

ピストンを通してB室の気体がした仕事 W はA室の気体がされた仕事に等しく、

$$W = \underbrace{CT_A''}_{\text{A・後の内部エネルギー}} - \underbrace{CT_0}_{\text{A・前の内部エネルギー}}$$

$$= C \cdot 2^{b-1} T_0 - CT_0$$

$$= (2^{b-1} - 1) CT_0$$

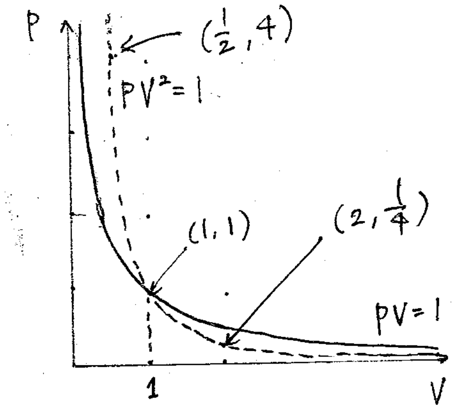
愛媛大 2009 前期

[4] 問3 (1)

A室：$PV^{\frac{5}{3}}$ ＝一定

B室：$PV^{\frac{7}{5}}$ ＝一定

比べにくいので $PV=1$ と $PV^2=1$ を比べてみると，



となる。この類推で ∴(ウ)

(2) 問1 ⑦までを新しい条件でやり直してみる。A室の b を b_A，B室の b を b_B とラベルしておく。

$$P_A \fallingdotseq P_0\left(1+b_A\frac{Sx}{V_0}\right)$$

$$P_B \fallingdotseq P_0\left(1-b_B\frac{Sx}{V_0}\right)$$

運動方程式は

$$Ma = P_BS - P_AS$$

$$= -P_0 b_B \frac{Sx}{V_0} - P_0 b_A \frac{Sx}{V_0}$$

$$= -\underbrace{(b_A+b_B)}_{2b\text{だったところが } b_A+b_B \text{ に置換される。}} P_0 \frac{S^2x}{V_0}$$

$$\therefore t = \frac{1}{2\pi S}\sqrt{\frac{MV_0}{(b_A+b_B)P_0}}$$

問1の場合 $b = \frac{5}{3}$ ∴ $2b=\frac{10}{3}$

問3の場合 $b_A+b_B = \frac{5}{3}+\frac{7}{5}=\frac{46}{15}$

$\frac{10}{3} > \frac{46}{15}$ より振動の周期は

問3の方が長い

答 (3)

以下余白